

Praca zbiorowa pod redakcją
Karoliny KNAPIK i Krzysztofa GROMYSZA

UJĘCIE AKTUALNYCH PROBLEMÓW BUDOWNICTWA



GLIWICE 2018

MONOGRAFIA



SPIS TREŚCI

	Str.
PRZEDMOWA	13
HAGER I. – Rewolucja technologiczna w budownictwie – druk 3D budynków i obiektów inżynierskich.....	15

MATERIAŁY BUDOWLANE I FIZYKA BUDOWLI

GIEROŃ D. – Ocena i modyfikacja wybranych właściwości betonu przeznaczonego do druku 3D.....	29
GOŁASZEWSKA M. – Wpływ składu cementu na właściwości reologiczne zapraw z cementów portlandzkich wapiennych.....	37
GRYGOROWICZ M. – Badanie zmienności współczynnika przejmowania masy w procesie dyfuzji wilgoci w drewnie świerkowym.....	49
JANIC A. – Wpływ właściwości cementu na kształtowanie się wskaźnika aktywności zmielonego granulowanego żużla wielkopieczowego.....	57
JEŻ K. – Wyznaczenie współczynników termodyfuzji wilgoci w drewnie sosny zwyczajnej.....	67
KOŁODZIEJ J. – Badania polaryzacyjne wpływu chlorków w syntetycznej cieczy porowej betonu na stal zbrojeniową z powłoką cynkową.....	75
KRYSTEK M. – Właściwości mechaniczne zaprawy cementowej z dodatkiem tlenku grafenu.....	83
PASZEK N. – Wpływ warunków pielęgnacji na wytrzymałość geopolimeru na bazie suspensji popiołu ze spalania węgla kamiennego.....	91
POKORSKA-SILVA I. – Modelowanie pól temperatury na budowlanym obiekcie testowym w warunkach rzeczywistych.....	99
SKOLIK M. – Pianobeton – przegląd literatury w zakresie podstawowych właściwości i zastosowania.....	107

KONSTRUKCJE BUDOWLANE I TEORIA KONSTRUKCJI

BIAŁOZOR R. – Implementacja algorytmu genetycznego w środowisku modelowania parametrycznego do zastosowań optymalizacji konstrukcji	119
CZABAK M. – Model matematyczny zespolonej belki drewniano-betonowej w ujęciu liniowej lepkośćprężystości.....	127
FRANKOWSKI G. – Numeryczna ocena odpowiedzi dynamicznej wywołanej uderzeniem pojazdu w ocenie odporności elementu konstrukcji.....	135

Mariusz CZABAK*
Politechnika Opolska

MODEL MATEMATYCZNY ZESPOLONEJ BELKI DREWNIANO- BETONOWEJ W UJĘCIU LINIOWEJ LEPKOSPREŻYSTOŚCI

1. Wprowadzenie

Zespalande zginanych elementów drewnianych z płytą betonową jest stosowane w praktyce od niemalże 100 lat. Pierwszą wzmiankę dotyczącą wykorzystania tej technologii wraz z opisem oraz interpretacją zasad jej pracy datuje się na 1922 r., kiedy to Muller (Niemcy) opatentował swój sposób na zwiększenie nośności belkowego stropu drewnianego za pomocą połączenia go z płytą betonową [1]. Natomiast w Polsce pomysł ten był rozwijany od lat 80-tych przez zespół prof. Godyckiego-Ćwirko [2, 3], który rozwiązał tym samym problemy związane z modernizacją lub zmianami sposobu użytkowania istniejących stropów drewnianych w licznych obiektach publicznych i mieszkalnych.

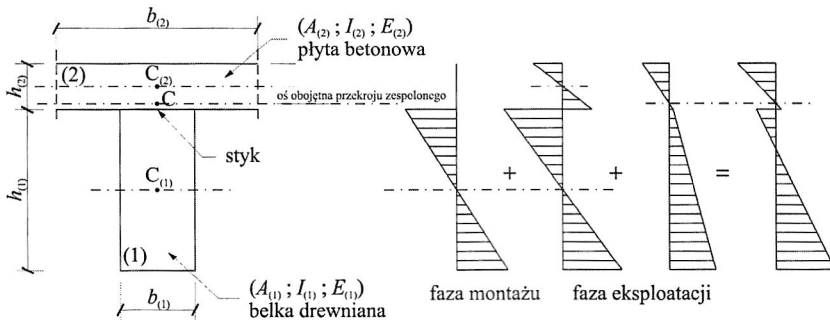
Obecnie konstrukcje zespolone, a w szczególności stalowo-betonowe, spotkać można przy realizacji wielu nowych inwestycji budowlanych. Przyczyną tego faktu jest oczywiście rachunek ekonomiczny, dyktujący minimalizowanie wykorzystywanego materiału przy jednoczesnym zachowaniu norm bezpieczeństwa. Idea zespalania drewna z betonem, z praktycznego punktu widzenia, nie różni się od tej w przypadku konstrukcji stalowo-betonowych. Drewno, będące materiałem rombowo-anizotropowym (szczególny przypadek ortotropii), charakteryzuje się różnymi właściwościami mechanicznymi w trzech kierunkach [4], wynikającymi z układu włókien celulozy, nadającej jemu charakterystyczne właściwości. Z tego powodu naprężenia rozciągające są efektywnie przenoszone wzdłuż włókien tego biopolimeru. Z kolei beton jest materiałem, który charakteryzuje się względnie dużą wytrzymałością na ściskanie [5]. Wynika stąd naturalnie układ warstw konstrukcji zespolonej, gdzie beton powinien być ścispany a drewno rozciągane wzdłuż włókien.

* Opiekun naukowy: dr hab. inż. Zbigniew PERKOWSKI, prof. Politechniki Opolskiej

Kolejną istotną kwestią w przypadku opisanych powyżej ustrojów konstrukcyjnych jest połączenie obu materiałów. Najczęściej spotykane są odpowiedniki trzpieni znane z belek stalowo-betonowych, takie jak gwoździe czy wkręty wspomagane np. poprzez wręby [6]. Należy tu zwrócić uwagę, że w przypadku wyczerpania nośności elementu konstrukcyjnego sytuacja ta powinna być wyraźnie sygnalizowana. Stąd w praktycznym zastosowaniu rzadko spotyka się połączenia klejowe, dla których charakterystyczna jest gwałtowna utrata właściwości spajających przy przekroczeniu ich nośności. Kolejną kwestią, która jest istotna w przedstawianym zagadnieniu, to fakt, że każdy z materiałów składowych belek/stropów drewniano-betonowych, wykazuje większe lub mniejsze właściwości reologiczne. Wpływa to tym samym radykalnie na wartość ugięć końcowych. Stąd w niniejszym artykule przedstawiony zostanie analityczny model matematyczny dwuwarstwowego pręta z uwzględnieniem procesów pełzania drewna, betonu, jak i samego złącza.

1.1. Naprężenia normalne w przekroju elementu

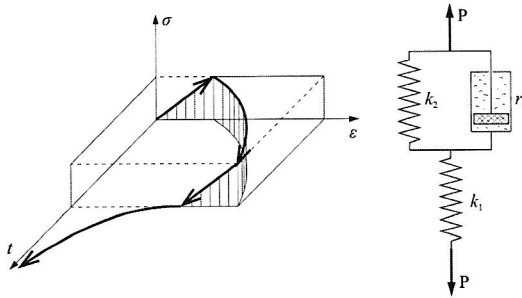
W zakresie liniowym fizycznie stan naprężeń normalnych występujących w konstrukcji obrazuje rys. 1. Wyraźnie widać, że w fazie montażu „pracuje” jedynie element drewniany, którego naprężenia można zniwelować, stosując tymczasowe podparcie stropu. Z powodu podatności złącza faza eksploatacji stanowi sytuację pośrednią pomiędzy przypadkiem dwóch stanów – całkowitego braku zespolenia oraz pełnego zszycia obu warstw. W ten sposób uzyskuje się przekrój, w którym oś obojętna znajduje się w okolicach styku. Zwiększa się tym samym korzystnie ramię działania wypadkowych naprężeń normalnych.



Rys. 1. Przekrój poprzeczny belki drewniano-betonowej i typowy stan naprężeń normalnych
 Fig. 1. Cross-section of composite wood-concrete beam and typical state of normal stresses

2. Model standardowy liniowej lepko-sprężystości

Przy sformułowaniu modelu matematycznego belki wykorzystany zostanie standardowy model liniowej lepko-sprężystości, stanowiący szeregowe połączenie modelu ciała Hooke'a (sprężyna o sztywności k_1) oraz Kelvina (równoległy układ sprężyny o sztywności k_2 i tłumika o tłumieniu r_2) (rys. 2). Model ten pozwala na uwzględnienie procesu pełzania i relaksacji materiału oraz charakteryzuje się pełną odwracalnością odkształceń opóźnionych.



Rys. 2. Model standardowy liniowej lepko-sprężystości
Fig. 2. Standard model of linear viscoelasticity

Przykładowo w procesie pełzania, w elemencie znajdującym się w jednoosiowym stanie naprężeń ściskających/rozciągających, pomiędzy jego skróceniem/wydłużeniem a obciążeniem można wprowadzić relację (początek obciążenia w chwili $t=0$):

$$u = P \left[\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} \left(1 - e^{-\frac{k_2}{r_2} t} \right) \right] H(t), \quad (1)$$

gdzie:

P – siła działająca na element,

H – funkcja Heaviside'a,

t – czas.

Następnie, przekształcając równanie (1), otrzymać można zależności pomiędzy naprężeniem i odkształceniem oraz wynikające stąd postacie funkcji pełzania i relaksacji:

$$\varepsilon = \sigma \left[\frac{1}{E} + \frac{\phi}{E} (1 - e^{-\gamma t}) \right] H(t), \quad (2)$$

$$\sigma = \frac{E}{1 + \phi} \left[1 + \phi e^{-\gamma(1+\phi)t} \right] H(t), \quad (3)$$

gdzie:

ε – odkształcenie,

σ – naprężenie,

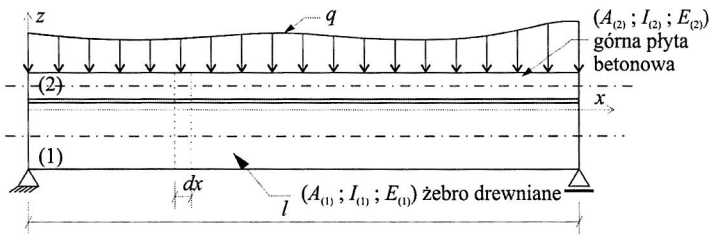
E – doraźny moduł sprężystości,

ϕ – współczynnik pełzania,

γ – parametr charakteryzujący intensywność procesu pełzania.

3. Model matematyczny zespolonej belki dwuwarstwowej

W celu wprowadzenia matematycznego opisu sił wewnętrznych i przemieszczeń zespolonej belki dwuwarstwowej w pierwszej kolejności myślowo wycinamy z niej różniczkowy element o długości dx (rys. 3).



Rys. 3. Schemat dwuwarstwowej belki zespolonej

Fig. 3. Scheme of two-layer composite beam

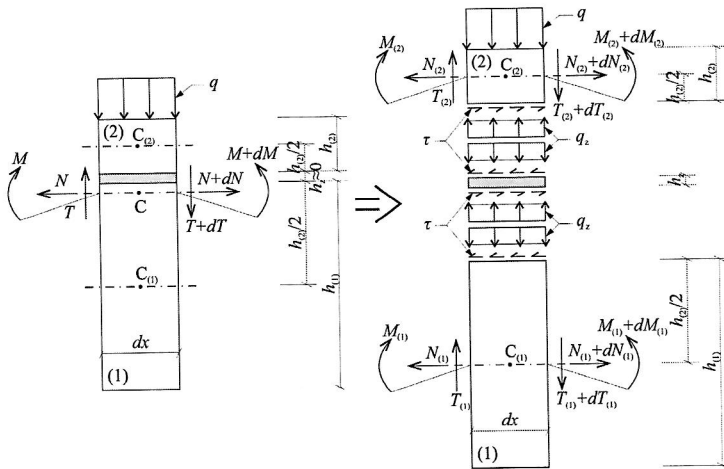
Wycinek ten rozdzielamy dodatkowo na elementy składowe, wynikające z układu warstw, zaznaczając również siły wewnętrzne, które na nie działają. Symbol τ na rys. 4 oznacza obciążenie rozłożone, ścinające styk warstw. Oznaczone na rys. 4 siły wewnętrzne i obciążenia pozwalają na wypisanie podstawowych równań równowagi różniczkowego wycinka belki:

$$\frac{\partial N_{(1)}}{\partial x} - \tau = 0, \quad \frac{\partial N_{(2)}}{\partial x} + \tau = 0, \quad (4)$$

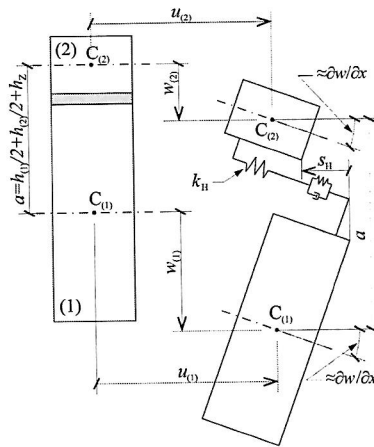
$$\frac{\partial T_{(1)}}{\partial x} = -q_z, \quad \frac{\partial T_{(2)}}{\partial x} = q_z - q \quad (5)$$

$$\frac{\partial M_{(1)}}{\partial x} - T_{(1)} + \tau \frac{h_{(1)}}{2} = 0, \quad \frac{\partial M_{(2)}}{\partial x} - T_{(2)} + \tau \frac{h_{(2)}}{2} = 0, \quad (6)$$

Dodatkowo, zdefiniowania wymagają również przemieszczenia każdej z warstw w kierunku poziomym „ $u_{(1)}$ ” i „ $u_{(2)}$ ” oraz pionowym „ w ” (rys. 5).



Rys. 4. Różniczkowy wycinek belki wraz warstwowymi siłami wewnętrznymi
 Fig. 4. Differential element of the beam with layer internal forces



Rys. 5. Przemieszczenia warstw belki
 Fig. 5. Displacements of beam layers

Stąd, na podstawie rys. 5, można następująco opisać stronę geometryczną zadania przy założeniu, że $w \approx w_{(1)} \approx w_{(2)}$:

$$\epsilon_{(i)} = -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} z_{(i)} + \frac{\partial u_{(i)}}{\partial x}, \quad (7)$$

$$S_H = -u_{(1)} + u_{(2)} + \frac{\partial w}{\partial x} \left(\frac{h_{(1)} + h_{(2)}}{2} + h_z \right), \quad (8)$$

Od strony fizycznej zagadnienie opisywane jest przez relacje naprężenia normalne-odkształcenia liniowe włókien belki w poszczególnych warstwach oraz zależność między obciążeniem ścinającym styk i jego poślizgiem. W przypadku

wykorzystania modelu ciała liniowo-lepkosprężystego implikuje to wprowadzenie do równań fizycznych w miejsce zwykłych iloczynów występujących w modelu sprężystym iloczynów splotowych funkcji:

$$\sigma_{(i)} = E_{(i)} * d\varepsilon_{(i)}, \quad (9)$$

$$\tau = -k_H * dS_H, \quad (10)$$

przy czym, na podstawie równania (3), wprowadza się następujące postacie funkcji $E_{(i)}$ i k_H , jako zależne od czasu:

$$E_{(i)} = \frac{\hat{E}_{(i)}}{1 + \phi_{(i)}} \left[1 + \phi_{(i)} e^{-\gamma_{(i)}(1+\phi_{(i)})t} \right] H(t), \quad (11)$$

$$k_H = \frac{\hat{k}_H}{1 + \phi_H} \left[1 + \phi_{(i)} e^{-\gamma_H(1+\phi_H)t} \right] H(t), \quad (12)$$

gdzie:

$\hat{E}_{(i)}$ – doraźny moduł sprężystości materiału i-tej warstwy,

\hat{k}_H – doraźna sztywność złącza na ścinanie.

Wynikają stąd dalej związki pomiędzy siłami wewnętrznymi a naprężeniami:

$$N_{(i)} = \int_{A_{(i)}} \sigma_{(i)} dA = E_{(i)} A_{(i)} * d \frac{\partial u_{(i)}}{\partial x}, \quad (13)$$

$$M_{(i)} = \int_{A_{(i)}} \sigma_{(i)} z_{(i)} dA = E_{(i)} I_{(i)} * d \frac{\partial^2 u_{(i)}}{\partial x^2}. \quad (14)$$

Ostatecznie podstawiając do równań (4)-(6) zależności (7) i (8) oraz (13) i (14), otrzymuje się układ trzech cząstkowych równań różniczkowych względem poszukiwanych przemieszczeń „ $u_{(1)}$ ” i „ $u_{(2)}$ ” oraz „ w ”:

$$\begin{cases} \left(E_{(1)} I_{(1)} + E_{(2)} I_{(2)} \right) * d \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} - \left(\frac{h_{(1)}}{2} \left(\frac{h_{(1)} + h_{(2)}}{2} + h_z \right) + \frac{h_{(2)}}{2} \left(\frac{h_{(1)} + h_{(2)}}{2} + h_z \right) \right) k_H * d \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \\ + \frac{h_{(1)} + h_{(2)}}{2} k_H * d \frac{\partial u_{(1)}}{\partial x} - \frac{h_{(1)} + h_{(2)}}{2} k_H * d \frac{\partial u_{(2)}}{\partial x} = -q \\ \left(\frac{h_{(1)} + h_{(2)}}{2} + h_z \right) k_H * d \frac{\partial w}{\partial x} + E_{(1)} A_{(1)} * d \frac{\partial^2 u_{(1)}}{\partial x^2} - k_H * d \frac{\partial u_{(1)}}{\partial x} + k_H * d \frac{\partial u_{(2)}}{\partial x} = 0 \\ - \left(\frac{h_{(1)} + h_{(2)}}{2} + h_z \right) k_H * d \frac{\partial w}{\partial x} + k_H * d \frac{\partial u_{(1)}}{\partial x} + E_{(2)} A_{(2)} * d \frac{\partial^2 u_{(2)}}{\partial x^2} - k_H * d \frac{\partial u_{(2)}}{\partial x} = 0 \end{cases} \quad (15)$$

Tego typu układ równań można rozwiązać, wykorzystując np. całkowanie numeryczne splotu i metodę różnic skończonych, w której funkcję ciągłą zamienia się na zbiór wartości funkcji w węzłach, i zastąpienie występujących w równaniach

pochodnych wzorami różnicowymi, z uwzględnieniem warunków początkowo-brzegowych.

4. Podsumowanie

Cieszące się coraz większą popularnością konstrukcje drewniane mają swoje ograniczenia, które wynikają przede wszystkim z wytrzymałości i sztywności drewna. Jedną z możliwości zwiększenia zakresu stosowania tego materiału w budownictwie, może się okazać jego zespalanie z innymi materiałami – np. z betonem.

Przedstawione w artykule podejście opisu matematycznego zagadnień reologicznych w układach zespolonych, może pozwolić na dokładne przewidywanie długotrwałego zachowania się konstrukcji z użyciem modelu obliczeniowego, nie wymagającego stosowania kosztownych czasowo procedur numerycznych. Ponadto, przy dynamicznym rozwoju podstaw teoretycznych i technik obliczeniowych sformułowań zadań odwrotnych w mechanice, istnieje możliwość wiarygodnego oszacowania wprowadzonych w prezentowanym modelu parametrów materiałowych wprost z pomiarów przemieszczeń belki w warunkach rzeczywistych. M.in. skuteczną możliwość takich obliczeń w przypadku badań statycznych i dynamicznych dwuwarstwowej belki zespolonej autor przedstawił w pracach [7, 8].

BIBLIOGRAFIA

1. Muller P.: Decke aus hochkantig stehenden holzbohlen oder holzbrettern und betondeckschicht, Patentschau aus dem Betonbau und den damit verwandten Gebieten. Auszüge aus den Patentschriften. Beton und Eisen, H. XVII, s. 244, 1922.
2. Godycki-Ćwirko T., Pawlica J., Romanowska A.: Wzmacnianie stropów na belkach drewnianych przez ich zespolenie z płytą betonową. Rada Programowa ds. Remontów i Modernizacji Budynków, ok. 1980.
3. Godycki-Ćwirko T., Kleszczewski J., Pawlica J.: Zespolony strop drewniano-żelbetowy. Inżynieria i Budownictwo, 8-9, s.193-197, 1982.
4. Foulger A.N.: Classroom demonstrations of wood properties. Washington, U.S. Govt. Print. Off., Washington 1969.
5. Neville A.M.: Właściwości betonu. Polski Cement, Kraków 2000.

6. Dias A.M.P.G.: Mechanical behaviour of timber-concrete joints. Rozprawa doktorska, Department of Civil Engineering, University of Coimbra, Portugal, 2005.
7. Czabak M., Perkowski Z., Gozarska T., Jędraszak B.: Badania zmian sztywności belki zespolonej drewniano-betonowej. Inżynieria i budownictwo, 11/2016, s. 604-608, Warszawa 2016.
8. Czabak M., Perkowski Z.: Określanie podatności na ścinanie złączy w stropach zespolonych drewniano-betonowych przy wykorzystaniu pomiarów drgań. „Wybrane zagadnienia inżynierii środowiska w budownictwie”, s. 291-302, Opole 2014.

MODEL MATEMATYCZNY ZESPOLONEJ BELKI DREWNIANO-BETONOWEJ W UJĘCIU LINIOWEJ LEPKOSPĘŻYSTOŚCI

Streszczenie

Artykuł przedstawia sformułowanie modelu matematycznego, opisującego przemieszczenia dwuwarstwowej, drewniano-betonowej belki zespolonej z podatnym złączem przy uwzględnieniu właściwości reologicznych materiałów składowych, jak i samego złącza. Właściwości reologiczne opisywane są z wykorzystaniem standardowego modelu liniowej lepkospężystości, a podstawę opisu matematycznego stanowią równania równowagi sił różniczkowego wycinka belki.

MATHEMATICAL MODEL OF COMPOSITE WOOD-CONCRETE BEAM IN LINEAR VISCOELASTICITY

Summary

The paper presents a formulation of mathematical model describing displacements of two-layer, wood-concrete, composite beam with a flexible joint and taking into account rheological properties of its component materials and interlayer joint. The rheological properties are described using the model of standard linear viscoelasticity. The equilibrium equations of forces for a differential element of the beam are the basis of mathematical description presented in the paper.

ISBN 978-83-7880-539-7

Wydawnictwo Politechniki Śląskiej

44-100 Gliwice, ul. Akademicka 5

tel. (32) 237-13-81, faks (032) 237-15-02

www.wydawnictwo.politechniki.pl

Dział Sprzedaży i Reklamy

tel. (32) 237-18-48

e-mail: wydawnictwo_mark@polsl.pl

<http://www.polsl.pl/Jednostki/RJ02-WPS>