

**POLSKA AKADEMIA NAUK**  
**KOMITET INŻYNIERII LĄDOWEJ I WODNEJ**

**WSPÓŁCZESNA**  
**MECHANIKA KONSTRUKCJI**  
**W PROJEKTOWANIU INŻYNIERSKIM**

**Redakcja naukowa:**

**Andrzej Garstecki, Wojciech Gilewski, Zbigniew Pozorski**

WARSZAWA 2015

## Spis treści

Wstęp	
<i>Andrzej Garstecki, Wojciech Gilewski, Zbigniew Pozorski</i> .....	5
I Podstawy teorii spawalnictwa w zastosowaniu do stalowych konstrukcji budowlanych	
<i>Marcin Chybiński</i> .....	9
II Wybrane zagadnienia optymalizacji konstrukcji	
<i>Grzegorz Dzierżanowski, Karol Bolbotowski</i> .....	41
III Eksperymentalne wspomaganie projektowania nietypowych mostów dla pieszych	
<i>Andrzej Flaga</i> .....	59
IV Zastosowanie hipersprężystości i MES w modelowaniu mostowych łożysk elastomerowych	
<i>Stanisław Jemiolo, Marcin Gajewski, Radosław Szczerba</i> .....	99
V Zastosowanie piezopolimerów do szacowania uszkodzeń konstrukcji budowlanych	
<i>Jan Kubik, Joachim Rzepka</i> .....	125
VI Modelowanie równań konstytutywnych polimerów hipersprężystych w złączach podatnych	
<i>Arkadiusz Kwiecień</i> .....	153
VII Analiza dynamiczna konstrukcji z wbudowanymi tłumikami drgań	
<i>Roman Lewandowski</i> .....	181
VIII Podstawy teoretyczne projektowania elementów konstrukcji stalowych ze względu na kryteria stateczności	
<i>Jakub Marcinowski</i> .....	205
IX Obliczeniowe modele materiałów: sprężystość, plastyczność, zarysowanie	
<i>Jerzy Pamin, Andrzej Winnicki</i> .....	237
X Obliczeniowe modele materiałów: uszkodzenie, lokalizacja odkształceń, przykłady	
<i>Jerzy Pamin, Andrzej Winnicki</i> .....	259
XI Diagnostyka złącza międzywarstwowego belek zespolonych na podstawie analizy częstotliwości drgań własnych	
<i>Zbigniew Perkowski, Mariusz Czabak</i> .....	281
XII Mechanika belek i płyt warstwowych	
<i>Zbigniew Pozorski</i> .....	301
XIII Wybrane zagadnienia mechaniki i projektowania lekkich konstrukcji stalowych	
<i>Katarzyna Rzeszut</i> .....	327
XIV Posadzki przemysłowe jako płyty na podłożu sprężystym	
<i>Jacek Ścigałło</i> .....	351
XV Stateczność płyt o cechach materiałów gradientowych na podłożu sprężystym	
<i>Maciej Taczala, Ryszard Buczkowski, Michał Kleiber</i> .....	375
XVI Eksperymentalna identyfikacja dynamicznych cech konstrukcji	
<i>Zbigniew Wójcicki, Jacek Grosel</i> .....	391

# XI DIAGNOSTYKA ZŁĄCZA MIĘDZYWARSTWOWEGO BELEK ZESPOLONYCH NA PODSTAWIE ANALIZY CZĘSTOTLIWOŚCI DRGAŃ WŁASNYCH

Zbigniew PERKOWSKI, Mariusz CZABAK

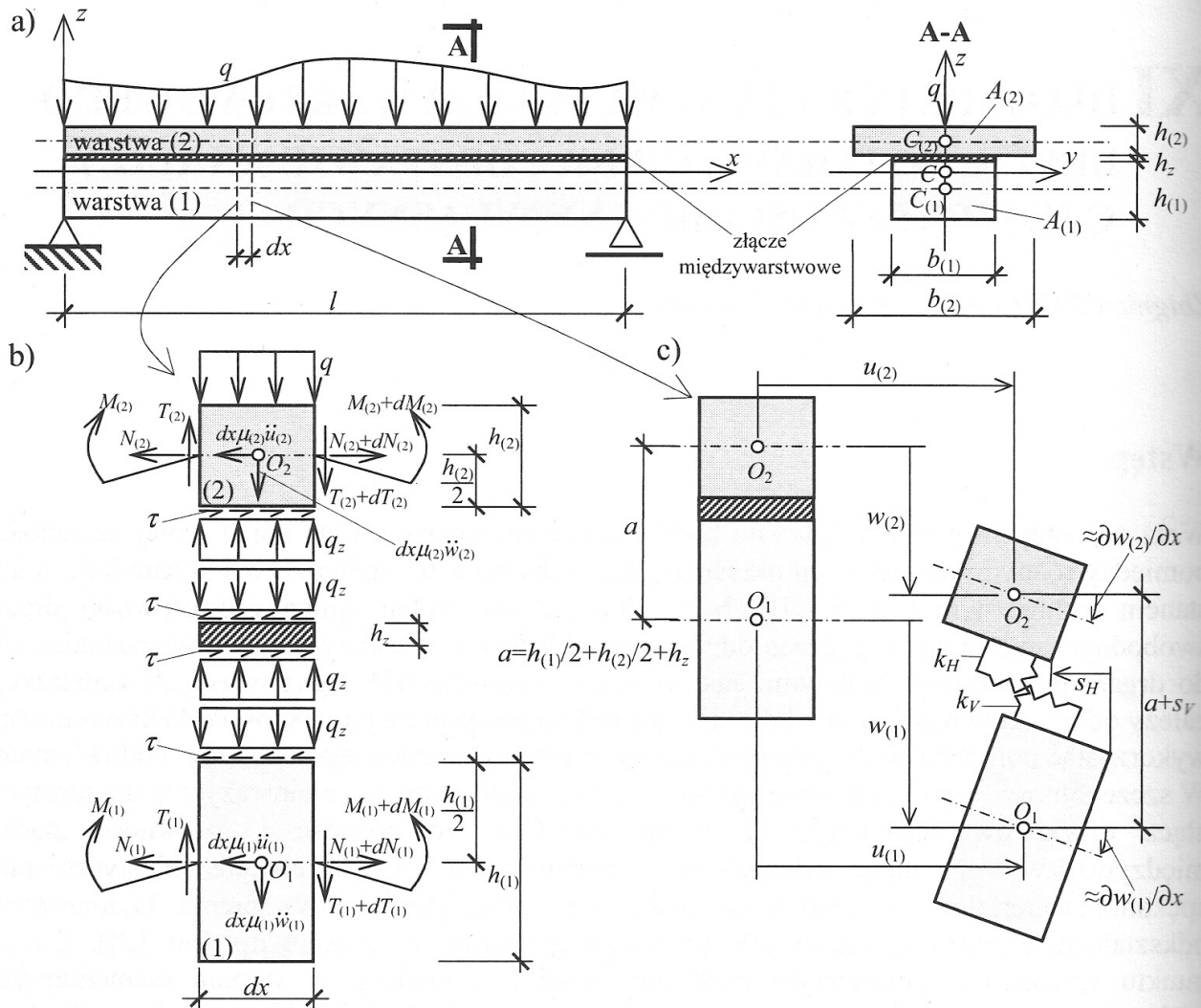
## Wstęp

Wraz z postępowaniem nauki w zakresie budownictwa rozpoznawane są coraz lepiej zależności pomiędzy różnymi parametrami określającymi cechy fizyczne materiałów i konstrukcji, a ich stanem technicznym (np. [3,8,9]). M.in. dotyczą one badań zmian częstotliwości drgań swobodnych mierzonych podczas odpowiedzi układów konstrukcyjnych, które wzbudza się do drgań obciążeniami próbnymi. Jak wiadomo, częstotliwość drgań własnych konstrukcji zależy od jej sztywności, a ta z kolei jest pośrednio związana z jej nośnością. Fakt ten można wykorzystać pomocniczo przy sporządzaniu ocen stanu technicznego obiektów budowlanych. W szczególności tego typu postępowanie można zastosować w nieinwazyjnej diagnostyce złącz dźwigarów zespolonych z uwagi na fakt, że nośność i sztywność złącza międzywarstwowego ulega jednoczesnemu zmniejszeniu – np. w efekcie uplastycznienia, spękania materiałów w zespoleniu belki przy przeciążeniu, wystąpieniu nadmiernych odkształceń termiczno-skurczowych, postępującej korozji, zmęczeniu itp. (np. [2]). Z tego punktu widzenia, w niniejszym rozdziale, zostaną omówione w stopniu elementarnym podstawy teoretyczne tego typu postępowania oraz sposoby badań i obliczeń ścinanych złącz belek. Na początku przedstawiony zostanie poglądowo model prętowy belki zespolonej. Przy jego pomocy omówiony zostanie wpływ sztywności złącza belki na zmienność częstotliwości jej drgań własnych i ugięć na przykładzie szeroko rozpowszechnionych belek stalowo-betonowych łączonych sworzniami. Następnie, w oparciu o wnioski wynikające z takich analiz, zostanie przedstawiony analogiczny przykład obliczeniowy stropowego żebra stalowo-betonowego, przeprowadzony przy wykorzystaniu Metody Elementów Skończonych.

**Słowa kluczowe:** *belka zespolona, sztywność złącza, częstotliwość drgań własnych.*

# 1. Model matematyczny belki

Analizę zachowania się belek zespolonych w elementarnym ujęciu można przeprowadzić w oparciu o model prętowy (por. [5]). Aby go sformułować, rozpatrzmy przykładowo liniowo-sprężystą belkę zespoloną, dwuwarstwową z uwzględnieniem przemieszczeń, jakie mogą wystąpić w efekcie ścinania i rozciągania/ściskania w kierunku pionowym złącza międzywarstwowego (rys. 1.1). Przekrój belki jest symetryczny względem osi pionowej, a poszczególne jej warstwy są bisymetryczne.



**Rysunek 1.1.** a) Schemat belki b) Wycinek różniczkowy belki z układem działających na niego sił c) Przemieszczenia belki i sztywności złącza uwzględnione w modelu belki

Równania fizyczne pomiędzy przekrojowymi naprężeniami normalnymi  $\sigma_{(i)}$  i odkształceniami liniowymi  $\varepsilon_{(i)}$  wzdłuż osi pręta w warstwie  $i$ -tej będą następujące:

$$\sigma_{(i)} = E_{(i)}\varepsilon_{(i)} \quad (i = 1, 2), \quad (1.1)$$

gdzie:  $i$  – indeks warstwy ( $i=1$  odnosi się do warstwy dolnej, a  $i=2$  do górnej),  $E_{(i)}$  – moduł Younga  $i$ -tej warstwy. Analogicznie, biorąc pod uwagę oznaczenia sił i przemieszczeń z rys. 1.1, pomiędzy obciążeniem  $\tau$  ścinającym złącze międzywarstwowo (wyrażonym w [N/m]), a poślizgiem warstw  $s_H$  oraz obciążeniem pionowym złącza  $q_z$  (wyrażonym w [N/m]), a jego wydłużeniem (lub skróceniem) w pionie  $s_V$ , obowiązywać będą relacje:

$$\tau = -k_H s_H, \quad q_z = -k_V s_V, \quad (1.2)$$

gdzie:  $k_H$  – sztywność złącza na ścinanie,  $k_V$  – sztywność złącza na działanie obciążeń pionowych. Przy zachowaniu hipotezy płaskich przekrojów, małych ugięciach i odkształceniach obowiązywać będą zależności geometryczne:

$$\begin{aligned} \kappa_{(i)} &= \frac{\partial^2 w_{(i)}}{\partial x^2}, \quad \varepsilon_{(i)} = -\kappa_{(i)} z_{(i)} + \varepsilon_{0(i)}, \quad \varepsilon_{0(i)} = \frac{\partial u_{(i)}}{\partial x} \quad (i=1,2), \\ s_H &= -u_{(1)} + u_{(2)} + \frac{\partial w_{(1)}}{\partial x} \frac{h_{(1)} + h_z}{2} + \frac{\partial w_{(2)}}{\partial x} \frac{h_{(2)} + h_z}{2}, \quad s_V = w_{(2)} - w_{(1)}, \end{aligned} \quad (1.3)$$

gdzie:  $\kappa_{(i)}$ ,  $w_{(i)}$ ,  $u_{(i)}$  – krzywizna, ugięcie i przemieszczenie poziome punktów na osi  $i$ -tej warstwy;  $z_{(i)}$  – oś główna, pionowa przekroju  $i$ -tej warstwy,  $x$  – oś pręta,  $\varepsilon_{0(i)}$  – odkształcenie liniowe w osi  $i$ -tej warstwy,  $h_{(i)}$  – wysokość przekroju  $i$ -tej warstwy;  $h_z$  – grubość złącza. Z kolei, biorąc pod uwagę zależności (1.1) i (1.3<sub>1</sub>)-(1.3<sub>3</sub>), można otrzymać następujące relacje pomiędzy siłami wewnętrznymi i przemieszczeniami:

$$N_{(i)} = \int_{A_{(i)}} \sigma_{(i)} dA = E_{(i)} A_{(i)} \frac{\partial u_{(i)}}{\partial x} \quad (i=1,2), \quad (1.4)$$

$$M_{(i)} = - \int_{A_{(i)}} \sigma_{(i)} z_{(i)} dA = E_{(i)} I_{(i)} \frac{\partial^2 w_{(i)}}{\partial x^2} \quad (i=1,2), \quad (1.5)$$

gdzie:  $N_{(i)}$ ,  $M_{(i)}$  – siła osiowa i moment zginający w przekroju  $i$ -tej warstwy;  $A_{(i)}$ ,  $I_{(i)}$  – pole przekroju i moment bezwładności względem poziomej osi głównej  $i$ -tej warstwy. Uwzględniając warunki równowagi różniczkowych wycinków warstw belki pokazanych na rys. 1.1 (tj. sumy rzutów sił w kierunku osi  $z$  i osi warstw oraz sumy momentów zginających względem punktów  $O_1$  i  $O_2$ ) można otrzymać następujące zależności:

$$\frac{\partial N_{(1)}}{\partial x} - \mu_{(1)} \frac{\partial^2 u_{(1)}}{\partial t^2} - \tau = 0, \quad \frac{\partial N_{(2)}}{\partial x} - \mu_{(2)} \frac{\partial^2 u_{(2)}}{\partial t^2} + \tau = 0, \quad (1.6)$$

$$\frac{\partial T_{(1)}}{\partial x} + \mu_{(1)} \frac{\partial^2 w_{(1)}}{\partial t^2} = -q_z, \quad \frac{\partial T_{(2)}}{\partial x} + \mu_{(2)} \frac{\partial^2 w_{(2)}}{\partial t^2} = -q + q_z, \quad (1.7)$$

$$\frac{\partial M_{(1)}}{\partial x} - T_{(1)} + q_z \frac{h_{(1)}}{2} = 0, \quad \frac{\partial M_{(2)}}{\partial x} - T_{(2)} + q_z \frac{h_{(2)}}{2} = 0, \quad (1.8)$$

gdzie:  $T_{(i)}$  – siła tnąca w przekroju  $i$ -tej warstwy,  $q$  – obciążenie pionowe belki,  $q_z$  – obciążenie pionowe przekazywane między górną i dolną warstwą przez złącze,  $\mu_{(i)} = \rho_{(i)} A_{(i)}$ ,  $\rho_{(i)}$  – gęstość  $i$ -tej warstwy. Ostatecznie, z równań (1.6) i dwukrotnie zróżniczkowanej po  $x$  sumy równań (1.8) przy uwzględnieniu zależności (1.2), (1.3<sub>4</sub>), (1.3<sub>5</sub>), (1.4), (1.5) i (1.7), uzyskuje się następujący układ równań różniczkowych cząstkowych z niewiadomymi funkcjami  $w_{(1)}$ ,  $w_{(2)}$ ,  $u_{(1)}$  i  $u_{(2)}$ :

$$\left\{ \begin{array}{ll} E_{(1)} I_{(1)} \frac{\partial^4 w_{(1)}}{\partial x^4} - k_H \frac{h_{(1)} + h_z}{2} \frac{h_{(1)}}{2} \frac{\partial^2 w_{(1)}}{\partial x^2} + k_V w_{(1)} & - k_H \frac{h_{(2)} + h_z}{2} \frac{h_{(1)}}{2} \frac{\partial^2 w_{(2)}}{\partial x^2} - k_V w_{(2)} \quad \dots \\ - k_H \frac{h_{(1)} + h_z}{2} \frac{h_{(2)}}{2} \frac{\partial^2 w_{(1)}}{\partial x^2} - k_V w_{(1)} & + E_{(2)} I_{(2)} \frac{\partial^4 w_{(2)}}{\partial x^4} - k_H \frac{h_{(2)} + h_z}{2} \frac{h_{(2)}}{2} \frac{\partial^2 w_{(2)}}{\partial x^2} + k_V w_{(2)} \quad \dots \\ k_H \frac{h_{(1)} + h_z}{2} \frac{\partial w_{(1)}}{\partial x} & + k_H \frac{h_{(2)} + h_z}{2} \frac{\partial w_{(2)}}{\partial x} \quad \dots \\ - k_H \frac{h_{(1)} + h_z}{2} \frac{\partial w_{(1)}}{\partial x} & - k_H \frac{h_{(2)} + h_z}{2} \frac{\partial w_{(2)}}{\partial x} \quad \dots \end{array} \right.$$

$$\begin{aligned}
& + k_H \frac{h_{(1)}}{2} \frac{\partial u_{(1)}}{\partial x} & - k_H \frac{h_{(1)}}{2} \frac{\partial u_{(2)}}{\partial x} & = & - \mu_{(1)} \frac{\partial^2 w_{(1)}}{\partial t^2} \\
& + k_H \frac{h_{(2)}}{2} \frac{\partial u_{(1)}}{\partial x} & - k_H \frac{h_{(2)}}{2} \frac{\partial u_{(2)}}{\partial x} & = & - \mu_{(2)} \frac{\partial^2 w_{(2)}}{\partial t^2} - q \\
& + E_{(1)} A_{(1)} \frac{\partial^2 u_{(1)}}{\partial x^2} - k_H u_{(1)} & + k_H u_{(2)} & = & \mu_{(1)} \frac{\partial^2 u_{(1)}}{\partial t^2} \\
& + k_H u_{(1)} & + E_{(2)} A_{(2)} \frac{\partial^2 u_{(2)}}{\partial x^2} - k_H u_{(2)} & = & \mu_{(2)} \frac{\partial^2 u_{(2)}}{\partial t^2},
\end{aligned} \tag{1.9}$$

Powyższy układ należy uzupełnić o odpowiednie warunki początkowo-brzegowe. Przykładowo, w przypadku belki swobodnie podpartej o długości  $l$  (przemieszczenia pionowe na końcach warstwy dolnej, siły tnące na końcach warstwy górnej oraz siły osiowe i momenty na końcach obu warstw są zerowe), która w chwili początkowej  $t=0$  ma zerowe przemieszczenia i prędkości, warunki te będą miały postać:

$$\begin{aligned}
w_{(1)}(x=0,t) &= 0, w_{(1)}(x=l,t) = 0, T_{(2)}(x=0,t) = 0, T_{(2)}(x=l,t) = 0, \\
\frac{\partial^2 w_{(i)}(x=0,t)}{\partial x^2} &= 0, \frac{\partial^2 w_{(i)}(x=l,t)}{\partial x^2} = 0, \\
\frac{\partial u_{(i)}(x=0,t)}{\partial x} &= 0, \frac{\partial u_{(i)}(x=l,t)}{\partial x} = 0, w_{(i)}(x,t=0) = 0, u_{(i)}(x,t=0) = 0, \\
\frac{\partial w_{(i)}(x,t=0)}{\partial t} &= 0, \frac{\partial u_{(i)}(x,t=0)}{\partial t} = 0 \quad (i=1,2), q(x,t \geq 0) = \tilde{q},
\end{aligned} \tag{1.10}$$

gdzie:  $\tilde{q}$  – znana funkcja obciążenia belki. W celu uproszczenia obliczeń często zakłada się sytuację, w której sztywność złącza na rozciąganie i ściskanie dąży do nieskończoności oraz przyjmuje grubość złącza jako pomijalną w stosunku do wysokości przekrojów warstw, ponieważ wielkości te w wielu praktycznych przypadkach nie mają większego wpływu na wyniki. Wtedy:

$$w_{(1)} = w_{(2)} = w, h_z \ll h_1 \text{ i } h_z \ll h_2, \tag{1.11}$$

a układ czterech równań (1.9) zmniejsza się do trzech (pierwsze dwa równania sumuje się, a wyrażenia zawierające wielkość  $k_V$  redukują się), tj.:

$$\left\{ \begin{aligned}
\sum_{i=1}^2 E_{(i)} I_{(i)} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} - k_H e^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} & + k_H e \frac{\partial u_{(1)}}{\partial x} & - k_H e \frac{\partial u_{(2)}}{\partial x} & = & - \sum_{i=1}^2 \mu_{(i)} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - q \\
k_H e \frac{\partial w}{\partial x} & + E_{(1)} A_{(1)} \frac{\partial^2 u_{(1)}}{\partial x^2} - k_H u_{(1)} & + k_H u_{(2)} & = & \mu_{(1)} \frac{\partial^2 u_{(1)}}{\partial t^2} \\
- k_H e \frac{\partial w}{\partial x} & + k_H u_{(1)} & + E_{(2)} A_{(2)} \frac{\partial^2 u_{(2)}}{\partial x^2} - k_H u_{(2)} & = & \mu_{(2)} \frac{\partial^2 u_{(2)}}{\partial t^2},
\end{aligned} \right. \tag{1.12}$$

gdzie:  $e = \frac{h_{(1)} + h_{(2)}}{2}$ . Powyższe zagadnienia początkowo-brzegowe mogą być stosunkowo łatwo rozwiązane numerycznie przy pomocy Metody Różnic Skończonych (MRS) lub Metody Elementów Skończonych (MES), gdzie układ równań różniczkowych cząstkowych sprowadzony zostaje do liniowego układu równań algebraicznych względem przemieszczeń (w MES także i obrotów) osi warstw w wybranych węzłach, co daje zapisać się w formie macierzowej:

$$\mathbf{Ku} = \mathbf{P} - \mathbf{B}\ddot{\mathbf{u}}, \tag{1.13}$$

gdzie:  $\mathbf{K}$  – macierz sztywności,  $\mathbf{u}$  – wektor przemieszczeń węzłowych (w MES także i obrotów),  $\mathbf{P}$  – wektor obciążeń,  $\mathbf{B}$  – macierz bezwładności. Na podstawie sformułowania problemu (1.13) można obliczyć częstotliwości drgań własnych belki, rozwiązując tzw. jej zagadnienie własne. W tym celu, w równaniu (1.13), zakłada się, że  $\mathbf{P}=\mathbf{0}$  i  $\mathbf{u}=\mathbf{u}_0 \sin(\omega t + \theta)$ , co

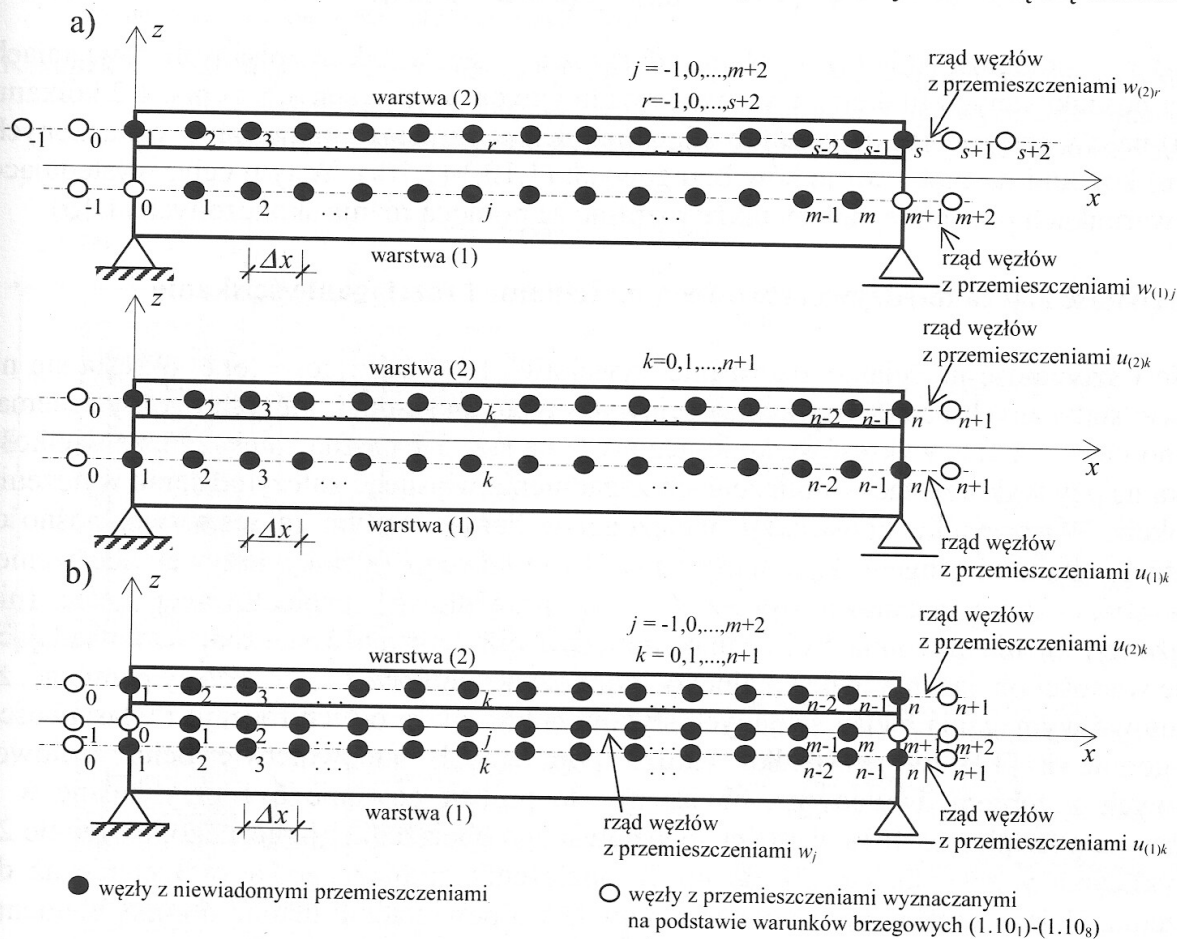
pozwała je tak przekształcić, że wielkość  $\omega^2$  będzie odpowiadać wartości własnej  $\lambda$  macierzy  $\mathbf{KB}^{-1}$ . Tym samym obliczamy wtedy kolejne częstości kołowe  $\omega_i$  oraz częstości drgań własnych belki  $f_i$  wg zależności:

$$(\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{B}) \mathbf{u}_0 \sin(\omega t + \theta) = \mathbf{0} \rightarrow \det(\mathbf{KB}^{-1} - \lambda \mathbf{I}) = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow \omega_i = \sqrt{\lambda_i} \rightarrow f_i = \frac{\omega_i}{2\pi}, \quad (1.14)$$

gdzie:  $\mathbf{0}$  – wektor zerowy,  $\mathbf{u}_0$  – wektor przemieszczeń węzłowych, odpowiadających postaci drgań własnych belki.

Z przedstawionego toku rozumowania w sposób oczywisty wynika, że częstości drgań własnych belki zależą od jej geometrii, masy, modułów Younga warstw, a ponadto od sztywności złącza. Stąd w sytuacji, w której znane są dynamiczne moduły Younga i masy warstw, można oszacować wartości sztywności złącza  $k_H$  i  $k_V$  przez porównanie częstości drgań swobodnych, otrzymanych z pomiarów prowadzonych na rzeczywistej konstrukcji i tych, które obliczamy na podstawie modelu teoretycznego. W tym miejscu należy dodatkowo zaznaczyć, że częstości drgań swobodnych rzeczywistej konstrukcji w efekcie tłumienia różnią się od wyidealizowanych częstości drgań własnych. Niemniej, z uwagi na praktycznie spotykany zakres tłumienia elementów konstrukcji budowlanych (np. [4]), częstości drgań swobodnych i własnych różnią się nieznacznie.



**Rysunek 1.2.** Schemat rozmieszczenia węzłów w MRS na przykładzie belki swobodnie podpartej przy rozwiązywaniu zagadnienia własnego, kiedy: (a) uwzględnia się skończoną sztywność pionową złącza  $k_V$  (ugięcia warstw opisywane są osobnymi funkcjami  $w_{(1)}$  i  $w_{(2)}$ ); (b) zakłada się, że sztywność pionowa złącza  $k_V \rightarrow \infty$  (ugięcia obu warstw są sobie równe:  $w_{(1)} = w_{(2)} = w$ ).

W przykładzie obliczeniowym, dotyczącym belki swobodnie podpartej, który zaprezentowano dalej w punkcie 3, rozwiązanie zagadnienia własnego uzyskano za pomocą autorskiego programu opartego na MRS. Stąd, w tej części pracy przedstawiony zostanie również krótki opis zastosowanego sposobu dyskretyzacji zadania tą metodą. W przypadku rozpatrywanych zagadnień własnych belki, zastosowano rozmieszczenie węzłów jak na rys. 1.2a i 1.2b. Z kolei, aby sprowadzić układy równań (1.9) i (1.12) do formy macierzowej (1.13) i dalej do (1.14<sub>1</sub>), należy rozpisać poszczególne równania w każdym z węzłów zaznaczonych czarnymi kółkami na rys. 1.2, przyrównując  $q$  do zera i zastępując w nich pochodne funkcji przybliżającymi je różnicami skończonymi – np.:

$$\begin{aligned}\frac{\partial f(x=a)}{\partial x} &= \frac{1}{2\Delta x} (f(x=a+\Delta x) - f(x=a-\Delta x)), \\ \frac{\partial^2 f(x=a)}{\partial x^2} &= \frac{1}{\Delta x^2} (f(x=a+\Delta x) - 2f(x=a) + f(x=a-\Delta x)), \\ \frac{\partial^3 f(x=a)}{\partial x^3} &= \frac{1}{2\Delta x^3} (f(x=a+2\Delta x) - 2f(x=a+\Delta x) + 2f(x=a-\Delta x) - f(x=a-2\Delta x)), \\ \frac{\partial^4 f(x=a)}{\partial x^4} &= \frac{1}{\Delta x^4} (f(x=a+2\Delta x) - 4f(x=a+\Delta x) + 6f(x=a) - \\ &\quad - 4f(x=a-\Delta x) + f(x=a-2\Delta x)),\end{aligned}\tag{1.15}$$

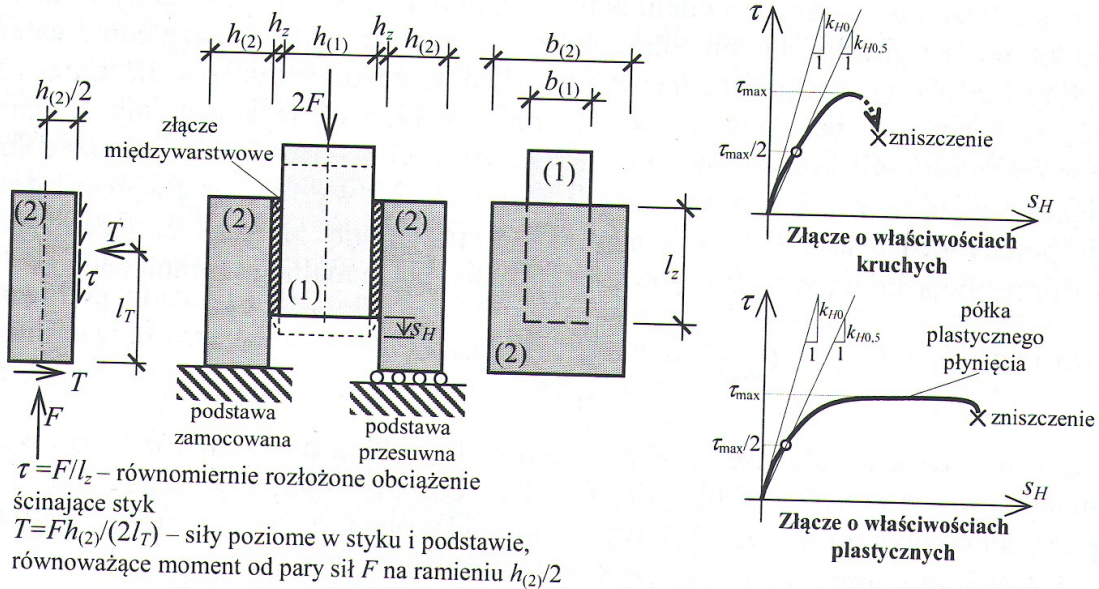
gdzie:  $\Delta x$  – odległość między węzłami. Pojawiające się w tak rozpisanych równaniach wartości poszukiwanych funkcji z tzw. węzłów fikcyjnych (zaznaczonych na rys. 1.2 kółkami białymi) należy przyrównać do zera lub odpowiednich przemieszczeń z węzłów oznaczonych czarnymi kółkami na mocy warunków brzegowych (1.10<sub>1</sub>)-(1.10<sub>8</sub>). W tym celu, występujące w tych warunkach pochodne, należy także rozpisać za pomocą różnic skończonych (1.15).

## 2. Sztywność złącza międzywarstwowego na ścinanie i rozciąganie/ściskanie

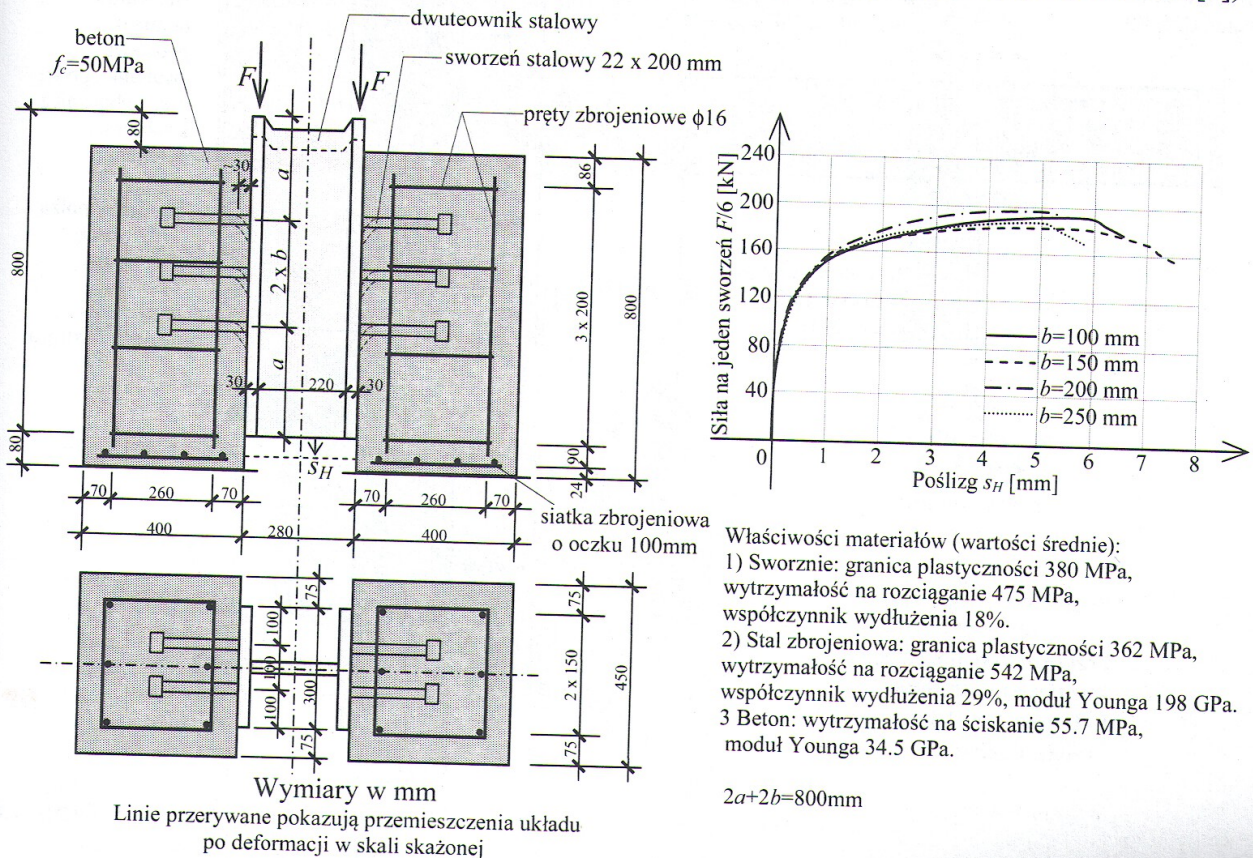
Nośność i sztywność na ścinanie złącza międzywarstwowego belki zespolonej określa się na podstawie statycznych badań wytrzymałościowych typu „push-out”, których ogólny schemat pokazano na rys. 2.1. Z wykresów zamieszczonych na rys. 2.1 można zauważyć, że wielkość  $k_H$ , którą należy wykorzystać w obliczeniach zagadnienia własnego zależy od stanu wyężenia konstrukcji. W przypadku konstrukcji obciążonej w bardzo małym zakresie swej nośności wielkość  $k_H$  stanowi tangens kąta nachylenia początkowego odcinka krzywej obciążenie-poślizg styku, którą oznaczono przez  $k_{H0}$ . W prawidłowo eksploatowanej belce (nie przeciążonej)  $k_H$  nie powinna być jednak mniejsza niż sztywność sieczna, odpowiadająca połowie wartości obciążenia maksymalnego, którą oznaczono przez  $k_{H0,5}$ . Należy pamiętać, że szczegółowe wymagania badań ścinanych styków belek zależą od ich rodzaju i właściwości. Np., zgodnie z [12], w przypadku bardzo popularnych w budownictwie belek stalowo-betonowych z żebrzem dwuteowym obciążenie do próbek powinno być przykładane w 3 etapach – na początku do 40% wartości spodziewanego obciążenia granicznego, następnie 25 razy cyklicznie w zakresie od 5% do 40% obciążenia granicznego, a w 3 etapie aż do zniszczenia. Należy wyeliminować także wpływ tarcia powierzchni betonu o półkę elementu stalowego, gdyż zawyżyłoby to sztucznie nośność i sztywność złącza. Obciążenia cykliczne najlepiej jest przeprowadzić przy stałym wzroście obciążenia, a etap ostatni przy stałej prędkości poślizgu, przy czym zniszczenie nie może nastąpić w czasie krótszym niż 15 min. Na rys. 2.1 należy także zwrócić uwagę na fakt, że sam przebieg zależności obciążenie-poślizg styku przy obciążeniu wyczerpującym jego nośność zależy od właściwości złącza. Jeśli jest ono kruche, to zniszczenie przebiega nagle po osiągnięciu maksymalnego obciążenia. Jeśli jest ono plastyczne (ciągliwe) zaobserwować można tzw. półkę plastycznego



plynięcia, tzn. po osiągnięciu maksymalnego obciążenia następuje znaczny wzrost poślizgu przy stałym obciążeniu, a zniszczenie przebiega w sposób „sygnalizowany”. Stąd, w zastosowaniach praktycznych, preferuje się złącza o właściwościach plastycznych – np. złącza sworzniowe w przypadku zespolonych belek stalowo-betonowych. Przykładowe wyniki badań ścinania tego typu połączenia pokazano na rys. 2.2.



**Rysunek 2.1.** Schemat typowego badania „push-out” do oznaczania nośności i sztywności ścinanych złączy konstrukcji zespolonych (elementy (1) i (2) muszą być wykonane z identycznych materiałów jak poszczególne warstwy belki zespolonej z rys. 1.1) (na podstawie [6])

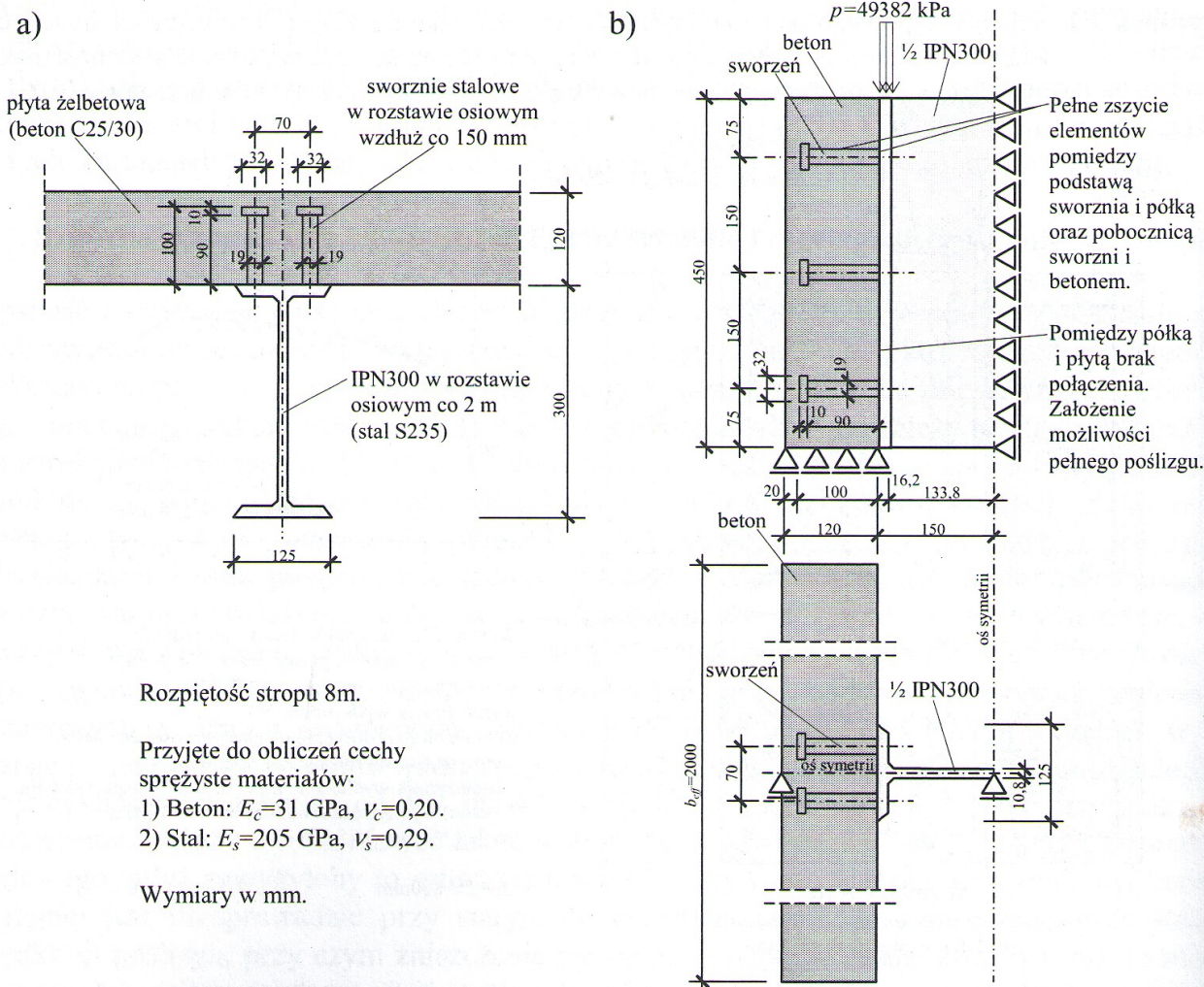


**Rysunek 2.2.** Przykładowe wyniki badań „push-out” próbek stalowo-żelbetowych z połączeniem ze sworzni stalowych (na podstawie [10])

Warto zauważyć, odnosząc się do modelu z rys.1.1, że nie można w rzeczywistym połączeniu sworzniowym wyróżnić dokładnie efektywnej grubości złącza  $h_z$ . Jest ono w tym przypadku zlokalizowane w betonie przy powierzchni styku z elementem stalowym. Można natomiast oszacować jego grubość, analizując długość najsilniej zdeformowanych odcinków sworzni po obciążeniu (rys. 2.2). W prezentowanym przykładzie badań wynosiła ona  $\sim 3$  cm. W celu uproszczenia obliczeń przy użyciu modelu belki zespolonej z rys. 1.1, gdy mamy wyznaczoną sztywność  $k_H$ , można grubość tą zaniedbać, lecz w to miejsce należy uwzględnić całkowitą grubość płyty betonowej. Na podstawie wyników zamieszczonych na rys 2.2 można także stwierdzić, że sztywność na ścinanie sworzni przy małych obciążeniach nie zmienia się znacząco w zależności od zastosowanego ich rozstawu wzdłuż – różnice są widoczne dopiero przy obciążeniu granicznym. Z wyników badań jak na rys. 2.2 wyznacza się wprost z definicji sztywność pojedynczego łącznika na ścinanie  $k_{sH0,5}$ , przyjmując do jego obliczenia poślizg zmierzony przy obciążeniu równym połowie obciążenia maksymalnego (granicznego):

$$k_{sH0,5} = \frac{F_{\max}}{2 n s_H \left( F = \frac{F_{\max}}{2} \right)}, \quad (2.1)$$

gdzie:  $F_{\max}$  – maksymalne obciążenie  $F$  na jeden styk próbki „push-out”,  $n$  – ilość sworzni w jednym styku (np. na rys. 2.2  $n=6$ ),  $s_H(F=F_{\max}/2)$  – poślizg zmierzony przy  $F=F_{\max}/2$ . Stąd, np. w przypadku sworzni z rys. 2.2 przy rozstawie wzdłuż 200mm, ( $F_{\max}/6=194.7$  kN,  $s_H(F=F_{\max}/2)=0,2$ mm), otrzymamy  $k_{sH0,5}=486.7$  MN/m.

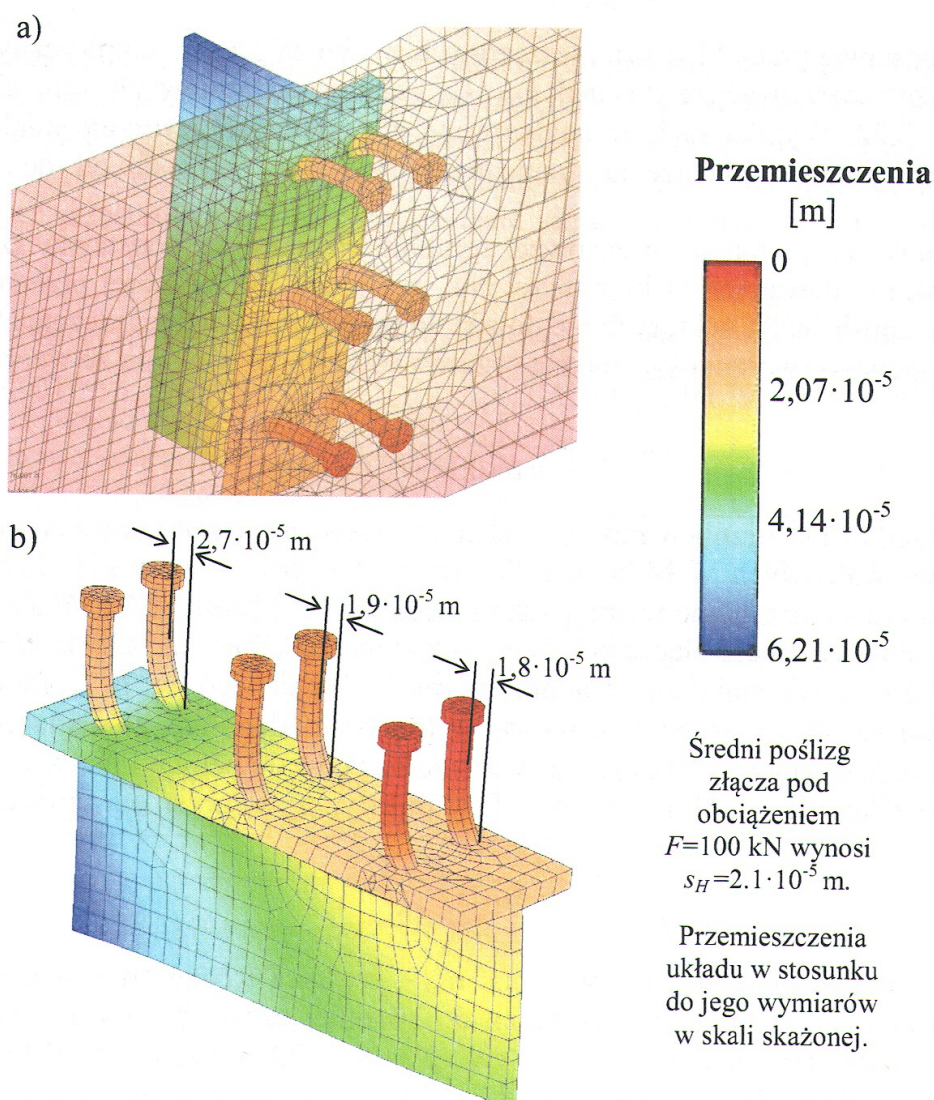


**Rysunek 2.3.** a) Przykładowy przekrój poprzeczny pojedynczego żebra stropu zespolonego  
b) Geometria modelu numerycznego próbki w teście „push-out” złącza stropu

By wartość  $k_{sH0,5}$  móc użyć w obliczeniach zagadnienia własnego opisanego wzorami (1.1)-(1.14), należy przeliczyć ją na sztywność złącza  $k_H=k_{H0,5}$ , która odnosi się do jego 1 mb, czyli:

$$k_{H0,5} = \frac{n_z k_{sH0,5}}{l_z}, \quad (2.2)$$

gdzie:  $n_z$  – ilość sworzni na długości  $l_z$  złącza. Jeśli nie ma możliwości przeprowadzenia badań „push-out”, minimalnie wymaganą sztywność złącza na ścinanie można również oszacować na podstawie analizy przemieszczeń w zakresie sprężystym modeli numerycznych, zbudowanych przy wykorzystaniu komercyjnych pakietów komputerowych, w których możliwa jest analiza trójwymiarowa (por. [1,7]). Przykład takich obliczeń podano poniżej w przypadku zespolonego stropu żelbetowo-stalowego o przekroju jak na rys. 2.3a. Żebra stropu o rozpiętości 8m i w rozstawie co 2m stanowią stalowe dwuteowniki IPN300 z górną płytą z betonu C25/30 o gr. 12cm. Stalowe sworznie mają średnicę 19mm i wysokość 100mm i usytuowane są w dwóch rzędach w rozstawie osiowym wzdłuż 150mm i w poprzek 70mm.



**Rysunek 2.4.** a) Przemieszczenia modelu z rys. 2.3b (obciążenie działa na powierzchni półki od góry w dół rysunku) b) Przemieszczenia elementów stalowych (sworzni i teownika) modelu z rys. 2.3b (na rysunku pokazano także założoną siatkę elementów skończonych)

Schemat modelu numerycznego próbki do testu „push-out”, adekwatnego do zastosowanego w stropie złącza, pokazano na rys. 2.3b, gdzie przyjęto szerokość elementu

betonowego równą szerokości efektywnej półki zastępczej belki wydzielonej myślowo ze stropu zgodnie z [12] ( $b_{eff}=2000\text{mm}$ ) oraz założono po 6 sworzni z każdej strony próbki. Z uwagi na uproszczenie obliczeń wykorzystano symetrię próbki. Ponieważ bada się sztywność początkową układu, założono cechy sprężyste modelu, przyjmując do obliczeń średnie moduły Younga oraz współczynniki Poissona betonu (wg [11]) i stali odpowiednio:  $E_c=31\text{GPa}$ ,  $\nu_c=0.20$ ,  $E_s=205\text{GPa}$  i  $\nu_s=0.29$ . Sumaryczną siłę ścinającą przyjęto przykładowo równą  $F=100\text{ kN}$ , którą przyłożono do półki teownika w postaci równomiernie rozłożonego obciążenia  $p$ . Przemieszczenia modelu, pokazane na rys. 2.4, obliczono w programie Autodesk Simulation, wykorzystującym MES.

Poślizg pomiędzy elementem stalowym i betonowym w modelu, można odczytać jako średnią różnicę pomiędzy przemieszczeniami sworzni w miejscu ich połączenia z półką i tuż pod łbem. W analizowanym przykładzie otrzymano wartość  $2.1 \cdot 10^{-5}\text{ m}$ . Stąd można obliczyć początkową sztywność pojedynczego sworzni na ścinanie:

$$k_{sH0} = \frac{F}{n s_H(F)} = \frac{100 \cdot 10^{-3}}{6 \cdot 2.1 \cdot 10^{-5}} = 793.7 \text{ MN/m}, \quad (2.3)$$

M.in. na podstawie pracy [10] i zamieszczonych w niej zależności empirycznych obciążenie-poślizg można oszacować, że stosunek  $k_{H0}/k_{H0,5}$  złącza sworzniowych waha się w przedziale od 1,96 do 2,22. Wynika stąd, że analizowane w przykładzie sworznie miałyby sztywność sieczną przy połowie obciążenia granicznego ( $k_{sH0,5}$ ) w zakresie od do 357 MN/m do 405 MN/m.

Sztywność  $k_{sH0,5}$  można oszacować zgrubnie również na podstawie szeregu wzorów empirycznych podawanych w literaturze. Np., wg pracy [6], w której przeanalizowano 116 testów typu „push-out” i w których nie doszło do przedwczesnego zniszczenia betonu, średnią sztywność jednego sworzni  $k_{s0,5}$  można oszacować zgrubnie w N/mm ze wzoru

$$k_{sH0,5} = \frac{F_{\max}}{n d (0.16 - 0.0017 f_{ck})}, \quad (2.4)$$

gdzie:  $d$  – średnica sworzni w mm,  $f_{ck}$  – charakterystyczna wytrzymałość na ściskanie betonu na próbkach walcowych w MPa,  $n$  i  $F_{\max}$  (tu w N) jak we wzorze (2.1). Współczynniki w zależności (2.4) otrzymano w przypadku próbek o  $f_{ck}$  z zakresu od 23 MPa do 82 MPa.

Minimalną sztywność złącza belki zespolonej na ściskanie/rozciąganie  $k_V$ , która także jest potrzebna do rozwiązania zagadnienia własnego, opisanego w p. 1, można oszacować w przypadku sworzni zgrubnie ze wzoru, w którym zakłada się, że obciążenia w kierunku pionowym przenoszone są tylko przez sworznie bez udziału betonu i przekazywane są one na beton przez zakotwienie w łbie sworzni. Stąd pojedynczy sworzni ma sztywność

$$k_{sV} = \frac{E_s \pi d_{sw}^2}{4 h_{sw}}, \quad (2.5)$$

gdzie:  $E_s$  – moduł Younga stali sworzni,  $d_{sw}$  – średnica trzonu sworzni,  $h_{sw}$  – wysokość trzonka sworzni (od półki dwuteownika do spodniej części łba sworzni). Przykładowo, przyjmując parametry jak w złączu z rys. 2.3a ( $E_s=205\text{ GPa}$ ;  $d_{sw}=0,019\text{ m}$ ;  $h_{sw}=0,09\text{ m}$ ), otrzymamy  $k_{sV}=645\text{ MN/m}$ . By wartość  $k_{sV}$  móc użyć w obliczeniach zagadnienia własnego, należy przeliczyć ją na sztywność złącza  $k_V$ , która odnosi się do jego 1 mb (podobnie jak we wzorze (2.2)), czyli:

$$k_V = \frac{n_z k_{sV}}{l_z}. \quad (2.6)$$

### 3. Przykłady obliczeń częstotliwości drgań własnych belki zespolonej

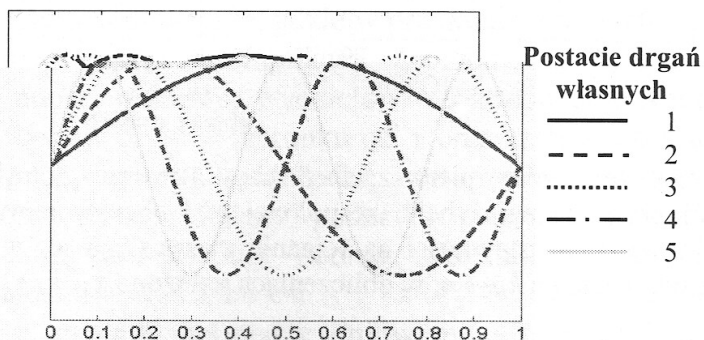
Rozważmy swobodnie podparty strop zespolony o przekroju i cechach materiałowych jak na rys. 2.3a. W przypadku wydzielonego ze stropu pojedynczego żebra jego model obliczeniowy przyjęty zostanie jako model belki zespolonej, który opisano w p. 1. Stosując oznaczenia jak w p. 1, poszczególne parametry modelu będą wynosić:

- warstwa dolna (1) (stal S235): przekrój IPN300,  $b_{(1)}=12.5$  cm,  $h_{(1)}=30$  cm,  $E_{(1)}=205$  GPa,  $A_{(1)}=69.1$  cm<sup>2</sup>,  $I_{(1)}=9800$  cm<sup>4</sup>,  $\rho_{(1)}=7850$  kg/m<sup>3</sup>,  $\mu_{(1)}=54.2$  kg/m;
- warstwa górna (2) (beton C25/30): przekrój prostokątny,  $b_{(2)}=200$  cm (efektywna szerokość współpracującej płyty),  $h_{(2)}=12$  cm,  $E_{(2)}=31$  GPa,  $A_{(2)}=2400$  cm<sup>2</sup>,  $I_{(2)}=28800$  cm<sup>4</sup>,  $\rho_{(2)}=2400$  kg/m<sup>3</sup>,  $\mu_{(2)}=576$  kg/m;
- złącze (stal S235): sworznie o średnicy 19mm, wysokości 100mm, rozstawie podłużnym 150 mm i w rozstawie poprzecznym 70 mm w dwóch rzędach,  $k_H=k_{H0,5}=4.76$  GN/m<sup>2</sup>;  $k_V=8.6$  GN/m<sup>2</sup> ( $k_H$  i  $k_V$  odpowiednio wg wzorów (2.2) i (2.6) dla  $n=2$ ,  $l_z=15$ cm, podatności jednego sworznia  $k_{sH0,5}=357$  MN/m<sup>2</sup>,  $k_{sV}=645$  MN/m<sup>2</sup> wg obliczeń z p. 2),  $h_z \rightarrow 0$  (pominięto w obliczeniach wpływ grubości złącza);
- rozpiętość:  $l=8$  m.

Rozwiązując zagadnienie własne w przypadku analizowanej belki, której model matematyczny opisano układem równań (1.9) (uwzględniającego skończone wartości  $k_V$  i  $k_H$ ) oraz (1.12) (uwzględniającego skończoną wartość  $k_H$  i  $k_V \rightarrow \infty$ ), otrzymać można wartości częstotliwości giętnych drgań własnych  $f_i$ , jak podano w tabl. 3.1. Ograniczono się przy tym do 5 pierwszych częstotliwości, których postacie drgań w ugięciach osi warstw belki pokazano na rys. 3.1.

**Tablica 3.1.** Częstotliwości giętnych drgań własnych belki obliczone wg modelu z p.1

Przypadek obliczeniowy	$f_1$ [Hz]	$f_2$ [Hz]	$f_3$ [Hz]	$f_4$ [Hz]	$f_5$ [Hz]
Złącze idealnie sztywne w kierunku pionowym z możliwością swobodnego poślizgu w kierunku poziomym: $k_V \rightarrow \infty$ , $k_H=0$ (wzory (3.1) i (3.2))	5.3	21.1	47.4	84.2	131.6
Złącze o skończonych sztywnościach w kierunku pionowym i poziomym: $k_V=8.6$ GN/m <sup>2</sup> , $k_H=4.76$ GN/m <sup>2</sup> (MRS)	8.7	33.7	72.1	121.0	178.0
Złącze idealnie sztywne w kierunku pionowym i o skończonej sztywności w kierunku poziomym: $k_V \rightarrow \infty$ , $k_H=4.76$ GN/m <sup>2</sup> (MRS)	8.7	33.8	72.6	122.7	182.8
Złącze idealnie sztywne w kierunku pionowym i poziomym: $k_V \rightarrow \infty$ , $k_H \rightarrow \infty$ (wzory (3.1) i (3.3))	8.8	35.3	79.4	141.1	220.6



**Rysunek 3.1.** Postacie giętnych drgań własnych belki (5 pierwszych)

W tabl. 3.1 podano także poglądowo wartości częstotliwości drgań, które odpowiadają skrajnym przypadkom szczególnym – kiedy istnieje możliwość w pełni swobodnego poślizgu warstw belki w złączu, a w kierunku pionowym złącze jest idealnie sztywne ( $k_H=0$ ,  $k_V \rightarrow \infty$ ) oraz kiedy złącze jest idealnie sztywne zarówno w kierunku pionowym jak i poziomym ( $k_H \rightarrow \infty$ ,  $k_V \rightarrow \infty$ ). Wówczas wartości  $f_i$  można otrzymać z powszechnie znanego wzoru (np. [4]) na częstotliwości drgań swobodnych belki swobodnie podpartej

$$f_i = \frac{i^2 \pi}{2l^2} \sqrt{\frac{EI}{\mu}}, \quad (3.1)$$

gdzie:  $i=1,2,\dots$ ;  $l$  – rozpiętość belki;  $\mu=\mu_{(1)}+\mu_{(2)}$  – masa pręta na jednostkę długości;  $EI$  – zastępcza sztywność giętna belki zespolonej.  $EI$  przy możliwości swobodnego poślizgu warstw belki i idealnie sztywnym zespoleniu obliczamy odpowiednio wg formuł:

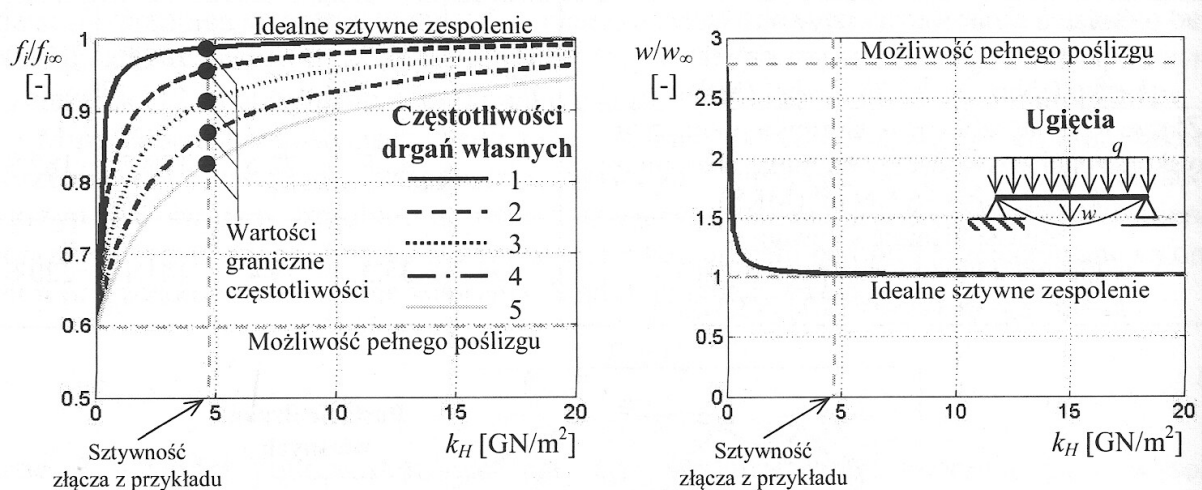
$$EI = E_{(1)}I_{(1)} + E_{(2)}I_{(2)}, \quad (3.2)$$

$$EI = E_{(1)}(I_{(1)} + z_{(1)}^2 A_{(1)}) + E_{(2)}(I_{(2)} + z_{(2)}^2 A_{(2)}), \quad (3.3)$$

gdzie:

$$z_{(1)} = \frac{h_{(1)}}{2} + h_z + \frac{h_{(2)}}{2} - z_{(2)}, \quad z_{(2)} = \frac{E_{(1)}A_{(1)}\left(\frac{h_{(1)}}{2} + h_z + \frac{h_{(2)}}{2}\right)}{E_{(1)}A_{(1)} + E_{(2)}A_{(2)}}. \quad (3.4)$$

Porównując otrzymane wyniki można zauważyć, że w rzeczywistych sytuacjach, w których mamy do czynienia ze skończonymi sztywnościami złącza, wartości  $f_i$  będą mieścić się zawsze między dwoma skrajnymi przypadkami, które w danym przykładzie określają wzory (3.1)-(3.4). W analizowanym zadaniu niższe częstotliwości z 2 i 3 wiersza tabl. 3.1 są bardzo zbliżone do tych z wiersza 4, które odpowiadają idealnemu zespoleniu. Zgodność ta jest coraz mniejsza wraz ze wzrostem częstotliwości. Można także zauważyć, że uwzględnienie wpływu sztywności na ściskanie/rozciąganie złącza w kierunku pionowym ma mały wpływ na wyniki w standardowych połączeniach sworzniowych.



**Rysunek 3.2.** Wykresy (a) zmian pierwszych 5 częstotliwości giętnych drgań własnych belki zespolonej i (b) ugięć belki zespolonej pod obciążeniem równomiernie rozłożonym w zależności od sztywności na ścinanie złącza ( $f_{i\infty}$  i  $w_{\infty}$  w oznaczają wartości  $f_i$  i  $w$ , które odpowiadają  $k_H \rightarrow \infty$ ; w obliczeniach założono  $k_V \rightarrow \infty$ )

By móc bardziej wnikliwie poddać analizie warunki pracy złącza z uwagi na jego sztywność, celowe jest przy ustalonych pozostałych parametrach belki wykreślenie zmian częstotliwości drgań własnych i ugięć maksymalnych od planowanego obciążenia

eksploatacyjnego w funkcji  $k_H$ . Poglądowo, w oparciu o model zagadnienia opisany w p. 1, przy danych z bieżącego przykładu przedstawiono tego typu wykresy: zmian częstotliwości  $f_i$  na rys. 3.2a i zmian ugięć od obciążenia równomiernie rozłożonego  $q$  na rys. 3.2b. Z uwagi na bardzo małe różnice pomiędzy przypadkami, w których  $k_V=8.6 \text{ GN/m}^2$  i  $k_V \rightarrow \infty$ , narysowano tylko wykresy, kiedy  $k_V \rightarrow \infty$ . Ponadto obliczone częstotliwości i ugięcia podano bezwymiarowo, odnosząc je do tych, które odpowiadają pełnemu zespoleniu wg prezentowanej teorii. Warto wspomnieć, że podobnie jak częstotliwości drgań własnych, przy  $k_H=0$  i  $k_H \rightarrow \infty$  z  $k_V \rightarrow \infty$ , ugięcia belki zespolonej można obliczyć ze standardowych wzorów. W analizowanym przypadku równomiernego obciążenia  $q$  ugięcia maksymalne w środku rozpiętości oblicza się ze znanej relacji (np. [4]):

$$w(x = \frac{l}{2}) = \frac{5}{384} \frac{ql^4}{EI}, \quad (3.5)$$

gdzie zastępczą sztywność giętną  $EI$  wyznacza się wg formuł (3.2)-(3.4).

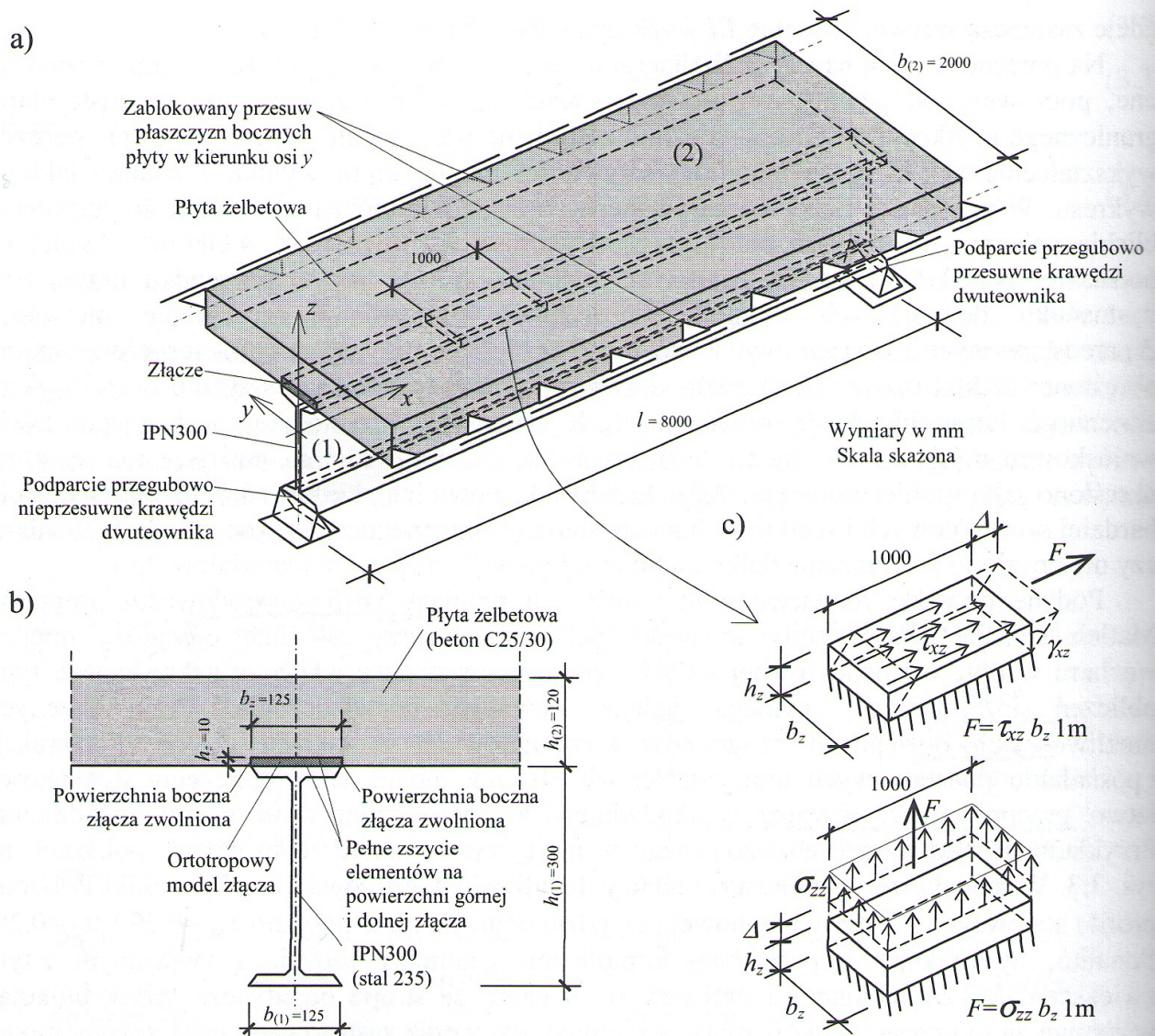
Na prezentowanym na rys. 3.2b diagramie ugięć można zauważyć, że nie zmniejszają się one, począwszy od pewnej wartości sztywności  $k_H$ . W związku z tym, w sensie stanu granicznego użytkowalności, tzw. idealnie zespolenie warstw belki można zapewnić poprzez wykształcenie złącza o nie mniejszej sztywności niż ta, która wynika z analizy takiego wykresu. W przypadku belki rozpatrywanej w przykładzie można stwierdzić, że zespolenie bliskie pełnemu ma miejsce począwszy od wartości  $k_H$  równej ok.  $4 \text{ GN/m}^2$ . Z kolei na podstawie rys. 3.2a można sformułować podobne wnioski jak w przypadku ugięć, lecz w stosunku do niższych częstotliwości drgań własnych – szczególnie pierwszej. Z przedstawionych rozważań wynika również, że, jeśli w przypadku belki zespolonej mamy określone: częstotliwości drgań swobodnych z pomiarów, pożądaną sztywność  $k_H$  i wykres zmienności częstotliwości jej drgań własnych jak na rys. 3.2a, to można na tej podstawie wnioskować o jakości jej złącza. Jeśli zmierzone częstotliwości są mniejsze niż te, które określono jako graniczne na rys. 3.2a, to fakt taki powinien skutkować w przeprowadzeniu bardziej szczegółowych i wnikliwych analiz stanu technicznego złącza (np. należy stwierdzić, czy nie doszło to przeciążenia belki, nadmiernej korozji, zmęczenia materiałów itp.).

Podane powyżej rozwiązania otrzymano za pomocą MRS w środowisku programu Matlab, stosując własne kody do modeli belki z p. 1 (przy założonej odległości między węzłami wzdłuż osi belki równej  $l/400$ ). Oprogramowanie we własnym zakresie tego typu obliczeń inżynierskich wymaga jednak pewnego doświadczenia. Przy obecnych możliwościach dostępnych programów komputerowych z zakresu analizy konstrukcji i posiadaniu podstawowych umiejętności ich obsługi, można takie obliczenia stosunkowo łatwo przeprowadzić, również w dokładniejszym, trójwymiarowym ujęciu zagadnienia. Przykładowo, taki model, analizowanego w niniejszym punkcie żebra stropu, pokazano na rys. 3.3. W modelu trójwymiarowym należy dodatkowo zdefiniować współczynniki Poissona profilu stalowego (1) i płyty betonowej (2), gdzie w przykładzie przyjęto  $\nu_{(1)}=0.29$  i  $\nu_{(2)}=0.20$ . Ponadto, by uniknąć niepotrzebnej komplikacji geometrii zadania i związanym z tym zwiększeniem czasochłonności obliczeń, wydzielono ze stropu pojedyncze żebro, blokując w zamian za to przesuw boków płyty w kierunku osi  $y$  oraz zastosowano uproszczony model złącza, gdzie sworznie zastąpiono jednorodną, ortotropową warstwą szcpepną. Aby zdefiniować materiał ortotropowy, należy podać 9 parametrów, definiujących relacje naprężenia-odkształcenia. Są to 3 moduły Younga, określające sztywność materiału przy czystym ściskaniu/rozciąganiu w kierunku osi  $x$ ,  $y$  i  $z$  ( $E_x$ ,  $E_y$ ,  $E_z$ ); 3 współczynniki Poissona ( $\nu_{xy}$ ,  $\nu_{xz}$ ,  $\nu_{yz}$ ), określające stosunki pomiędzy liniowymi odkształceniami, które występują w kierunku prostopadłym i równoległym w stosunku do kierunku działania naprężeń normalnych (odpowiednio osi  $x$  i  $y$ ,  $x$  i  $z$ ,  $y$  i  $z$ ) oraz 3 moduły Kirchhoffa ( $G_{xy}$ ,  $G_{xz}$ ,  $G_{yz}$ ), określające sztywność na ścinanie w płaszczyznach wyznaczonych przez pary osi  $xy$ ,  $xz$  i  $yz$ .

Zastępcze złącze musi mieć takie właściwości, które efektywnie będą równoważne właściwościom złącza rzeczywistego. Ponieważ określone wcześniej sztywności złącza na ścinanie  $k_H$  i ściskanie/rozciąganie  $k_V$  odnoszą się do relacji: obciążenie rozłożone liniowo - przemieszczenie, to należy przeliczyć je na ich odpowiedniki z relacji naprężenie - odkształcenie. Oznacza to, że przy układzie osi jak na rys. 3.3a w ortotropowym modelu złącza należy dobrać odpowiednio jego moduły Kirchhoffa  $G_{xz}$  i  $G_{yz}$  oraz moduł Younga  $E_z$ . Rozważając jednostkowy wycinek złącza jak na rys. 3.3c w warunkach czystego ścinania naprężeniami  $\tau_{xz}$  można obliczyć, że:

$$\frac{F}{1\text{m}} = k_H \Delta \text{ i } \tau_{xz} = G_{xz} \gamma_{xz} \rightarrow \frac{F}{b_z 1\text{m}} = G_{xz} \frac{\Delta}{h_z}, \text{ skąd wynika, że } G_{xz} = k_H \frac{h_z}{b_z}, \quad (3.6)$$

gdzie:  $F$ ,  $\Delta$ ,  $\gamma_{xz}$ ,  $h_z$ ,  $b_z$  jak na rys. 3.3b,c.



**Rysunek 3.3.** a) Geometria trójwymiarowego modelu numerycznego belki b) Przekrój modelu belki c) Naprężenia tnące i normalne do płaszczyzny jednostkowego wycinka złącza oraz wywołane przez nie deformacje

Z uwagi na fakt, że belka w układzie jak na rys. 3.3a jest modelem trójwymiarowym należy również uwzględnić możliwość ścinania jej złącza w kierunku osi  $y$ . Jeśli jednostkowy wycinek złącza ma w tym kierunku również sztywność na ścinanie  $k_H$ , to przez analogię do wprowadzenia (3.6) otrzymamy, że:



$$G_{yz} = k_H \frac{h_z}{1m} \quad (3.7)$$

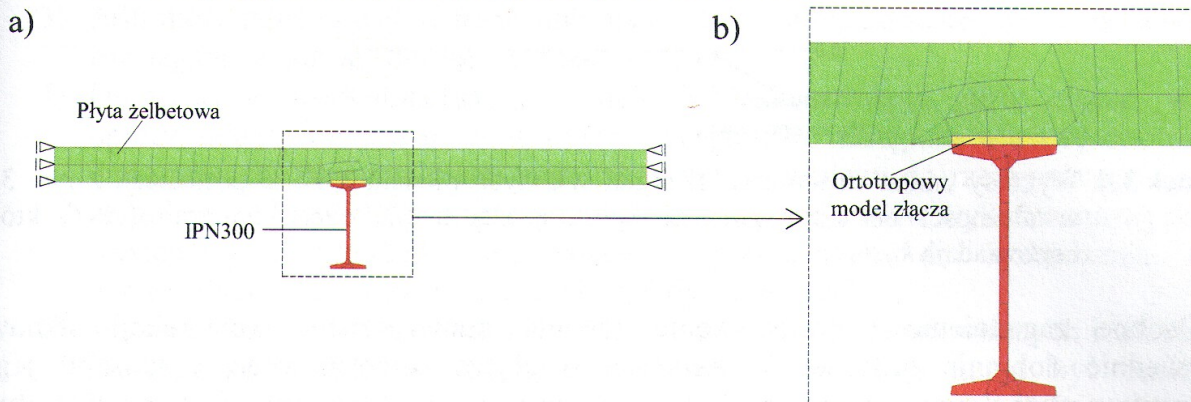
Podobnie, rozważając jednostkowy wycinek złącza jak na rys. 3.3c rozciąganego tylko naprężeniami  $\sigma_{zz}$ , można obliczyć, że:

$$\frac{F}{1m} = k_V \Delta \text{ i } \sigma_{zz} = E_z \varepsilon_{zz} \rightarrow \frac{F}{b_z 1m} = E_z \frac{\Delta}{h_z}, \text{ skąd wynika, że } E_z = k_V \frac{h_z}{b_z} \quad (3.8)$$

W przykładzie z rys. 3.3 przyjęto w związku z tym, że złącze ma parametry:  $G_{xz}=0.381$  GPa,  $G_{yz}=0.048$  GPa i  $E_z=0.688$  GPa. Pozostałe parametry odkształcalności złącza należy przyjąć jak w przypadku betonu płyty, tzn.:

$$E_x = E_y = E_{(2)}, \quad \nu_{xy} = \nu_{xz} = \nu_{yz} = \nu_{(2)}, \quad G_{xy} = \frac{E_{(2)}}{2(1+\nu_{(2)})} \quad (3.9)$$

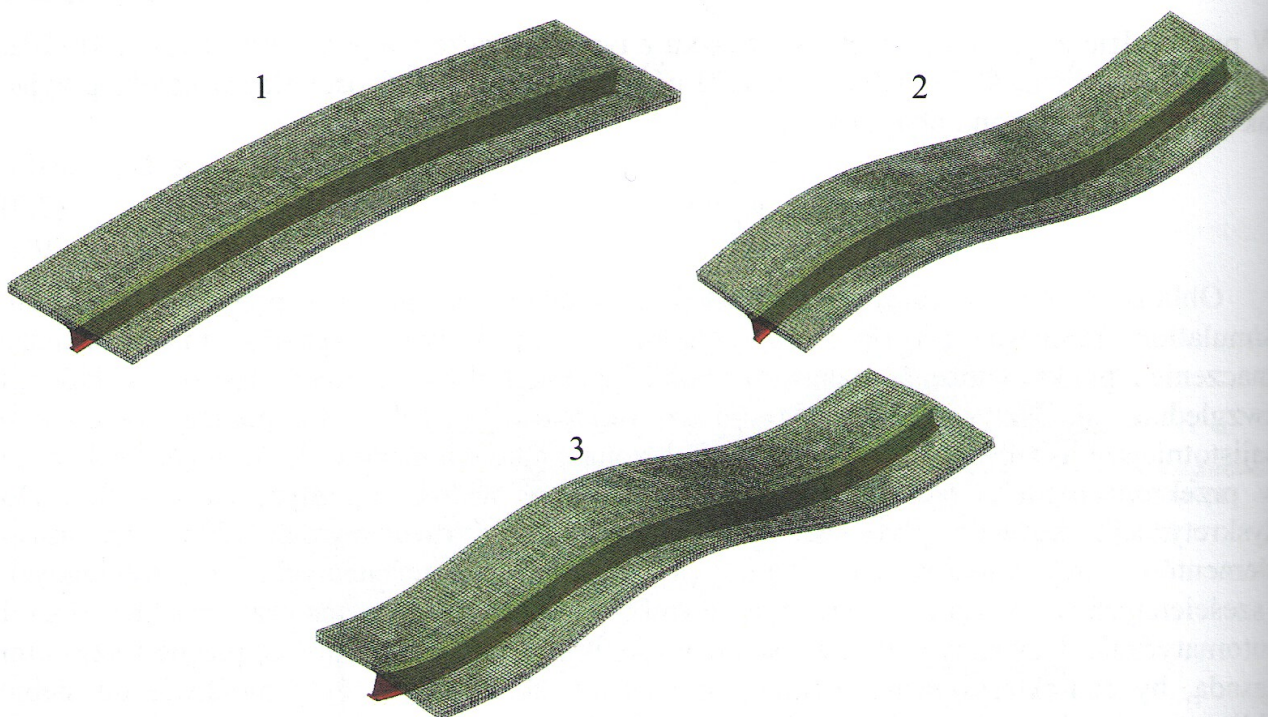
Obliczenia do rozważanego przykładu wykonano za pomocą programu Autodesk Simulation. Ponieważ sposób budowy modelu MES w tym przypadku ma zasadnicze znaczenie z punktu widzenia poprawności obliczeń częstotliwości drgań własnych, w których uwzględnia się sztywność złącza międzywarstwowego belki, to poniżej omówiono najistotniejsze aspekty tego zagadnienia. Założoną siatkę elementów skończonych pokazano w przekroju modelu żebra stropowego na rys. 3.4 i w widoku ogólnym na rys. 3.5. Do dyskretyzacji, zarówno płyty betonowej, złącza jak i dwuteownika stalowego, użyto elementów trójwymiarowych (typu „solid” – czworościennych, pięciociennych i sześciennych z węzłami wierzchołkowymi). Ich rozmiary zastosowany pakiet dobrał automatycznie. Używany w tym wypadku algorytm siatkowania kieruje się przede wszystkim zasadą, by charakterystyczne rozmiary elementów skończonych były możliwie do siebie zbliżone w każdym z kierunków układu odniesienia i porównywalne z rozmiarami sąsiednich elementów. Jednocześnie długości ich boków muszą być co najwyżej tego samego rzędu co najmniejsze charakterystyczne wymiary wydzielonych w modelu obliczeniowym obszarów o innych właściwościach materiałowych, a siatka powinna ulegać zagęszczeniu w miejscach spodziewanych koncentracji naprężeń. W przeciwnym wypadku MES generuje z zasady niedokładności w wynikach. Ponadto, im mniejsze są rozmiary elementów, tym obliczenia są coraz dokładniejsze, choć badając zbieżność wyników należy podział ten ograniczyć do rozsądnego minimum ze względu na ich czasochłonność i stabilność. Jeśli stosowany program nie zapewnia spełnienia tych wymogów automatycznie, należy, o ile to możliwe, zagęszczać samemu siatkę elementów, kierując się powyższymi zasadami. W omawianym przykładzie zastosowano ostatecznie 31401, 10504 i 942 elementów skończonych, odpowiednio w przypadku dyskretyzacji płyty, dwuteownika i złącza.



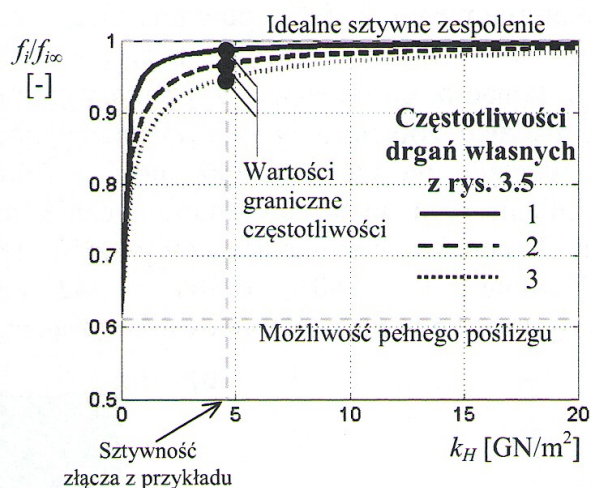
**Rysunek 3.4.** Widoki założonej siatki elementów skończonych w przekroju modelu żebra stropowego: a) całego żebra, b) dwuteownika i zastępczego złącza.

**Tablica 3.2.** Częstotliwości drgań własnych modelu MES o czysto giętej postaci

Przypadek obliczeniowy	$f_1$ [Hz]	$f_2$ [Hz]	$f_3$ [Hz]
Złącze o skończonych sztywnościach w kierunku pionowym i poziomym: $k_V=8.6 \text{ GN/m}^2$ , $k_H=4.76 \text{ GN/m}^2 \rightarrow$ $\rightarrow G_{xz}=0.381 \text{ GPa}$ , $G_{yz}=0.048 \text{ GPa}$ , $E_z=0.688 \text{ GPa}$	8.3	28.4	66.1



**Rysunek 3.5.** Postacie drgań własnych modelu MES o czysto giętej postaci (pierwsze 3) (na rysunkach pokazano także założoną siatkę elementów skończonych)



**Rysunek 3.6.** Wykresy zmian częstotliwości drgań własnych modelu MES o postaciach z rys. 3.5 w zależności od sztywności na ścinanie złącza ( $f_{ico}$  oznaczają wartości  $f_i$ , które odpowiadają  $k_H \rightarrow \infty$ )

Osobne zagadnienie przy tworzeniu modelu numerycznego konstrukcji stanowi odpowiednie dobranie grubości  $h_z$  zastępczego złącza ortotropowego i sposobu jego połączenia z płytą i dwuteownikiem. Z uwagi na przyjęte założenia grubość  $h_z$  powinna być możliwie jak najmniejsza. Jednocześnie powinna ona umożliwiać sensowną dyskretyzację modelu konstrukcji, biorąc pod uwagę zasady generowania siatek i ich wpływ na dokładność

i czasochłonność obliczeń. Dlatego w przedstawianym przykładzie przyjęto na zasadzie kompromisu  $h_z=1$  cm. Aby odzwierciedlić rzeczywisty charakter pracy złącza, polegający głównie na przenoszeniu obciążeń ścinających w poziomie i ściskających/rozciągających w pionie, adekwatnie do możliwych deformacji przedstawionych na rys. 3.3c, węzły elementów skończonych na bokach pionowych zastępczego modelu złącza zostały rozdzielone od węzłów sąsiednich elementów płyty betonowej (rys. 3.3b). Z kolei, elementy na poziomych powierzchniach złącza, u góry i u dołu, zostały w pełni zszyte z sąsiednimi elementami dyskretyzującymi odpowiednio płytę betonową i dwuteownik stalowy (rys. 3.3b).

W wyniku przeprowadzonych obliczeń MES otrzymano częstotliwości drgań własnych, z których pierwsze 3, o czysto giętej postaci, podano w tabl. 3.2. Postacie tych drgań pokazano na rys. 3.5. Można przy tym zauważyć, że częstotliwość  $f_1$  w stosunku do pozostałych bardziej odpowiada wynikom z modelu prętowego. Przy kolejnych postaciach drgań model MES uwzględnia już przestrzenne, bardziej zbliżone do rzeczywistych, warunki pracy układu konstrukcyjnego, które rzutują na różnice pomiędzy wartościami z tabl. 3.1 i 3.2. Ponadto występują w nim także giętno-skretne postacie drgań, których nie pokazano z uwagi na ograniczoną zawartość opracowania.

Poglądowo na rys. 3.6 wykreślono także zmiany częstotliwości drgań własnych modelu o postaciach z rys. 3.5 w funkcji  $k_H$  przy ustalonych pozostałych parametrach. Również i w tym przypadku można wysnuć analogiczne wnioski jak z wykresu na rys. 3.2a.

Analizowane w niniejszym punkcie żebro stropu zespolonego ze względów poglądowych jest stosunkowo prostym przykładem konstrukcji zespolonej. Stąd należy podkreślić, że, kiedy z uwagi na geometrię konstrukcji nie można wykonać obliczeń tylko w przypadku jej elementu powtarzalnego, należy opracować model numeryczny całej konstrukcji.

#### 4. Podsumowanie

Podsumowując przedstawione w rozdziale wiadomości i przykłady obliczeń, można sformułować następujący tok postępowania przy diagnostyce stanu złącza istniejących belek zespolonych na podstawie analizy ich drgań swobodnych:

- 1) Określenie geometrii belki zespolonej i cech sprężystych materiałów jej warstw (modułów Younga i współczynników Poissona) (np. z badań ultradźwiękowych, sklerometrycznych itp.)
- 2) Określenie minimalnej ze względów nośności i użyteczności konstrukcji sztywności złącza na ścinanie z badań eksperymentalnych typu „push-out” – maksymalnie przy połowie obciążenia granicznego. W przypadku połączeń sworzniowych stal-beton, przy korzystaniu z modelu numerycznego, można założyć początkowe cechy sprężyste użytych materiałów, a minimalną sztywność połączenia przyjąć, z ustalonego z porównywalnych badań, stosunku  $k_{H0}/k_{H0,5}$ .
- 3) Jeśli może mieć to wpływ na wyniki, należy także oszacować sztywność na ściskanie-rozciąganie złącza w kierunku pionowym.
- 4) Opracowanie trójwymiarowego modelu MES konstrukcji, gdzie złącze, w celu uproszczenia geometrii modelu, można przyjąć jako zastępczą warstwę ortotropową o równoważnych parametrach materiałowych w stosunku do rzeczywistego sposobu zespolenia. W modelu tym należy uwzględnić ciężary warstw wykończeniowych, jeśli występują, i układów obciążających, potrzebnych do wzbudzenia drgań w rzeczywistej konstrukcji podczas badań dynamicznych.
- 5) Wyznaczenie na podstawie modelu MES częstotliwości drgań własnych i ich postaci. Z uwagi na możliwości pomiarów istotne są te, które mogą być zmierzone dysponowanym sprzętem do pomiaru drgań, tzn. jego częstotliwość próbkowania powinna być min. ok. 10 razy wyższa od częstotliwości drgań swobodnych

konstrukcji, które zamierza się zmierzyć. Ponadto ze względu na natężenie sygnału najdogodniejszymi do pomiaru są te częstotliwości, których postaci drgań mają charakter giętny i które są niższe.

- 6) Zmierzenie częstotliwości drgań swobodnych rzeczywistej konstrukcji wzbudzonej do drgań próbnymi obciążeniami, nie wywołującymi istotnych zmian w wyężeniu konstrukcji. Czujniki przyspieszeń drgań należy umieścić tam, gdzie zidentyfikowane z modelu postacie drgań wykazują największe przemieszczenia.
- 7) Porównanie obliczonych i zmierzonych częstotliwości drgań własnych. Jeśli pomierzone są niższe, niż te określone jako minimalne, należy wnikliwiej zdiagnozować stan techniczny złącza (w tym poprzez odkrywki) i rozważyć wprowadzenie działań naprawczych, zmiany metodologii obliczeniowej, zakładającej np. niepełne zespolenie, lub ograniczeń w użytkowaniu konstrukcji.

Na podstawie modelu MES celowe jest również wyznaczenie wykresu jak na rys. 3.2b do analizy zmienności ugięć w zależności od sztywności na ścinanie złącza. Jeśli ugięcie konstrukcji belkowej nie mieści w zakresie ugięć zbliżonych do tych, które osiągnęte są przy pełnym zespoleniu (minimalnych) oznaczać to będzie, iż mamy do czynienia z przypadkiem niepełnego zespolenia warstw belki. Należy wtedy również podjąć działania, jak określono to w p. 7 powyższego algorytmu. Trzeba także podkreślić, że podstawą diagnozowania i określania stanów granicznych nośności i użytkowalności konstrukcji zespolonych są przede wszystkim odpowiednie opracowania normowe (np. [11,12]), a przedstawione w niniejszym rozdziale wiadomości służyć mogą istotną pomocą w ocenie stanu technicznego konstrukcji, szczególnie o większym znaczeniu.

## Bibliografia

- [1] Bouchair A., Bujnak J., Duratna P., Lachal A.: Modeling of the steel-concrete push-out test, *Procedia Engineering*, 40, 2012, 102-107.
- [2] Brozzetti J., Design development of steel-concrete composite bridges in France, *J. Constructional Steel Research*, 55, 2000, 229-243.
- [3] Cowley P., Adams R.D., The location of defects in structures from measurements of natural frequencies, *Journal of Strain Analysis*, 14, 1979, pp. 49-57
- [4] Dyląg Z., Jakubowicz A., Orłoś Z, *Wytrzymałość Materiałów*, T. 1 i 2, WNT, Warszawa 1997.
- [5] Kuczma B., Kuczma M., Badania doświadczalne i modelowanie klejonych stalowo-betonowych belek zespolonych, *ZN Politechniki Rzeszowskiej*, 283, Seria: Bud. i Inżynieria Środowiska, 59, 3/2012/II, 381-388, Rzeszów 2012.
- [6] Oehlers D. J., Bradford M. A., *Composite Steel and Concrete Structural Members. Fundamental Behaviour.*, Pergamon, 1995.
- [7] Pavlović M., Marković Z., Veljković M., Budevaca D., Bolted shear connectors vs. headed studs behavior in push-out tests, *J. Constructional Steel Research*, 88, 2013, 134-149
- [8] Takahide S., Shiro K., Development of a new non-destructive testing technique for quantitative evaluations of delamination defects in concrete structures based on phase delay measurement using lock-in thermography, *Infrared Physics & Technology*, 43, 2002, 311-316.
- [9] Wiwattanachang N., Giau P.H., Monitoring crack development in fiber concrete beam by using electrical resistivity imaging, *J. Applied Geophysics*, 75, 2011, 294-304.
- [10] Xue D., Liu Y., Yu Z. He. J., Static behavior of multi-stud shear connectors for steel-concrete composite bridge, *J. Constructional Steel Research*, 74, 2012, 1-7.
- [11] PN-EN 1992-1-1, Eurokod 2. Projektowanie konstrukcji z betonu. Część 1-1: Reguły ogólne i reguły dla budynków., wrzesień 2008.
- [12] PN-EN 1994-1-1, Eurokod 4. Projektowanie zespolonych konstrukcji stalowo-betonowych. Część 1-1: Reguły ogólne i reguły dla budynków., grudzień 2008.